В. В. Мултановский

# КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

## СТРУКТУРА ФИЗИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ

| ВЫВОДЫ | | | |
|---|---|---|---|
| | Предсказание новых явлений | Объяснение известных фактов | Решение конкретных задач |

| ЯДРО | | | |
|---|---|---|---|
| | Принципы симметрии и инвариантности<br><br>Совокупность законов сохранения | Система законов /уравнений/, определяющая связи и изменения фундаментальных физических величин | Законы связи новых и старых теорий<br><br>Мировые постоянные |

| ОСНОВАНИЕ | | | |
|---|---|---|---|
| | Правила действий над физическими величинами | Система фундаментальных понятий и физических величин<br><br>Идеализированный объект — модель материального объекта<br><br>Эмпирический базис<br><br>Эмпирические факты | Правила соотнесения физических величин с опытом |

## МАСШТАБЫ МАТЕРИАЛЬНОГО МИРА

| Протяженность области, м | Объекты – структурные единицы деления материи | Размеры объекта, м | Масса объекта, кг | Состав объекта[1] | Движение внутри объекта составляющих его структурных частей |
|---|---|---|---|---|---|
| $10^{26}...10^{23}$ | Галактики | $10^{21}$ | $10^{41}$ | Звезды | Звезд |
| $10^{23}...10^{-8}$ | Планетные системы звезд | $10^{13}$ | $10^{30}$ | Планеты | Планет |
| | Планеты и окружающие нас на Земле тела | $10^{6}...10^{-2}$ | $10^{24}...10^{-3}$ | Молекулы и атомы | Молекул и атомов |
| $10^{-8}...10^{-18}$ | Молекулы и атомы | $10^{-8}...10^{-10}$ | $10^{-27}...10^{-24}$<br>$10^{-27}...10^{-25}$ | Ядра и электроны | Электронов и ядер |
| | Ядра атомов | $10^{-14}...10^{-15}$ | $10^{-27}...10^{-25}$ | Нуклоны | Нуклонов |
| | Элементарные частицы | $10^{-15}...10^{-19}$ | $0...10^{-27}$ | Кварки | Кварков |

[1] В состав объектов мега – и макромира входят макроскопические электромагнитные и гравитационные поля.

В. В. Мултановский

# КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Классическая механика. Основы специальной теории относительности. Релятивистская механика

Допущено Министерством просвещения СССР в качестве учебного пособия для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1988

ББК 22.31
М90

Рецензеиты:
кафедра теоретической физики Липецкого педагогического ииститута;
профессор, зав. кафедрой теоретической физики
Владимирского педагогнческого института
Д. И. Пеииер

**Мултановский В. В.**

М 90 Курс теоретической физики: Классическая механика. Основы специальной теории относительности. Релятивистская механика: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов.— М.: Просвещение, 1988.—304 с.: ил.

ISBN 5-09-000625-3

Курс открывается кииематикой точки и твердого тела. В ием подробно изложеиа дииамика материальиой точки и системы точек. Цеитральиое место отведено осиовам аиалитической механики, методы которой применяются и в релятивистской дииамике.

Курс рассчитан иа самостоятельиую работу студеитов по лекциям и практическим заиятиям.

$М\frac{4309000000-429}{103(03)-88}$ 29—88

ББК 22.31

ISBN 5-09-000625-3

## Предисловие

Курс написан в соответствии с современной программой, целями и задачами обучения будущих учителей. Наш многолетний опыт работы со студентами приводит к заключению, что курс теоретической физики в пединституте должен быть простым и доступным, но в то же время не упрощенным, достаточно полным для отражения существа физических теорий.

Курс состоит из пяти частей: I — Классическая механика, II — Основы специальной теории относительности. Релятивистская механика, III — Классическая электродинамика, IV — Квантовая механика, V — Статистическая физика и термодинамика. Они выходят отдельными книгами. В первой книге помещены I и II части курса, во второй будет III часть, в третьей книге — IV часть. Часть V — Статистическая физика и термодинамика — вышла ранее. (Издательство «Просвещение», 1985 г.)

В первой книге имеется общая для всех частей вводная глава, которая поможет выяснить некоторые важные методологические и мировоззренческие вопросы физики, установить взаимосвязь фундаментальных физических теорий.

Основной программный материал курса разбит на параграфы, обеспечивающие логическую последовательность изложения, а содержание параграфа примерно соответствует одной лекции. Однако с переходом на новые учебные планы лектор будет определять число лекций по теме программы, ориентируясь на содержание главы курса и относя часть материала ее параграфов к самостоятельной работе студентов. Дополнительный материал выделен шрифтом или отмечен звездочкой. К нему можно обращаться для углубления понимания отдельных вопросов, выяснения деталей.

Бо́льшая часть всех параграфов снабжена примерами, а главы — упражнениями. Не заменяя специальных задачников, они предназначены для облегчения организации самостоятельной работы студентов над курсом. Этой же цели служат методические замечания к отдельным вопросам и темам, набранные петитом места и углубляющие основной материал параграфы. Лектор сможет давать по ним задания при изучении теоретического материала.

Примеры и упражнения можно использовать и на практических занятиях, семинарах. При обсуждении методологических вопросов физики уместно обращаться к вводной теме курса.

Стремление к простоте раскрытия сложных в математическом отношении и трудных в силу своей абстрактности вопросов курса потребовало в ряде мест определенных методических мер и решений.

В механике избран традиционный путь, начинающийся с законов Ньютона, динамики материальной точки. Вся электродинамика изложена на основе учения об электромагнитном поле в вакууме, причем общие его уравнения предшествуют частным случаям. В квантовой механике изучению основных вопросов предпослана пропедевтическая тема, содержащая решение простейших одномерных задач еще без применения специального математического аппарата. В статистической физике в основу положен квантовый подход, что позволяет проще и последовательнее дать ее исходные положения и получить основные выводы.

При написании курса классической механики использованы лекции доцентов И. И. Бессонова и А. М. Изергина, чем мы хотели почтить их память.

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И КАРТИНА МИРА

Перед вами новый курс — теоретическая физика. Что в ней изучается, как связаны между собой эксперимент и теория, курс общей физики и предлагаемый — теоретической, для чего учителю физики необходимы знания теоретической физики — ответы на эти вопросы содержатся во вводной главе.

Важная цель изучения физики будущим учителем состоит в овладении совокупностью общих ее идей, принципов, законов, общих сведений о строении, движении, взаимодействии объектов окружающего нас материального мира. Эта совокупность и есть физическая картина мира. Во вводной главе она раскрывается с качественной стороны, что позволяет изучать далее физические теории как фрагменты единой картины.

### § 1. Предмет и метод теоретической физики

**Эксперимент и теория.** Физика — наука экспериментальная: в ней для исследования объектов и явлений материального мира ставится специальный научный опыт — эксперимент, в котором целенаправленно изучают явление природы, материальный объект в строго учитываемых условиях. При проведении эксперимента обеспечивается возможность следить за изучаемым физическим объектом, воздействовать на него другими объектами, изменять условия протекания изучаемого физического процесса или явления, воссоздать или вызвать явление. Добытые с помощью эксперимента сведения представляют собой отдельные факты физической науки; устанавливаются частные законы. По мере накопления экспериментальных фактов и частных законов, в процессе исторического развития физики, возникает потребность их теоретического обобщения, которое достигается с помощью некоторых новых положений — исходных принципов или общих законов, составляющих основу большой группы уже открытых частных законов, физических явлений, свойств, фактов и т. п.

В «Диалектике природы» Ф. Энгельс писал: «Эмпирическое естествознание накопило такую необъятную массу положительного материала, что в каждой отдельной области исследования стала прямо-таки неустранимой необходимость упорядочить этот материал систематически и сообразно его внутренней связи... Но, занявшись этим, естествознание вступает в теоретическую область, а здесь

эмпирические методы оказываются бессильными, здесь может оказать помощь только теоретическое мышление»[1].

Наиболее полно и последовательно теоретические обобщения физических знаний достигаются в физических теориях. Почему же возможно обобщение широкого круга физических фактов и отдельных законов в теории? Ответ на этот вопрос дает марксистско-ленинская теория познания — диалектическая логика. Она открыла материальное единство мира, всеобщую связь объектов и явлений в нем, познаваемость мира. Благодаря этим свойствам мира оказывается возможным для очень больших групп физических объектов и явлений найти главные законы — «клеточки познания», с помощью которых объединяются и объясняются все свойства объектов и явления из каждой группы. Теоретическое обобщение достигается путем выявления общности природы физических явлений и объектов, их сущности и исходного принципа.

В качестве примера можно рассмотреть историю изучения электрических и магнитных явлений, продолжающуюся на протяжении нескольких веков (и не закончившуюся в наши дни). В начальный период эмпирические знания об электричестве и магнетизме были весьма разобщенными: насчитывали, например, до пяти видов электричества, а электрические и магнитные явления трактовали как самостоятельные, не связанные друг с другом. Частные эмпирические законы электричества и магнетизма были открыты в конце XVIII и в XIX в.— это законы Кулона, Ома, Био и Савара, Ампера, Фарадея. Их обобщение достигнуто в теории Максвелла. Все электромагнитные явления оказались проявлениями одной физической сущности — электромагнитного поля, а основу теории электромагнитного поля — главные законы — составили уравнения Максвелла.

**Функции теории.** В настоящее время общепризнано, что теория является основной и ведущей формой знания для всех наук. Велика роль теории и в физической науке. В ходе социально-исторического процесса познания человеком окружающего мира и в ходе развития науки теория складывается для использования, приумножения и передачи следующим поколениям добытых знаний.

Итак, *первая функция теории* — использование человеком имеющихся знаний в практической деятельности. Практика выдвигает множество задач, решение которых не содержится в накопленных эмпирических фактах, хотя их весьма много и они разнообразны. Теория же (потенциально) содержит в себе ответ на любую задачу, которая относится к области ее применения. Например, располагая законами механики, можно теоретически рассчитать необходимую начальную скорость и время старта для космического корабля, направляемого в любую точку Солнечной системы. Решить такую задачу экспериментально нет никакой возможности. Важно заметить, что квантовая механика, например, позволяет понять и рассчитать любое явление на атомно-молекулярном уровне, начиная от строения элект-

[1] Маркс К., Энгельс Ф. Соч.— 2-е изд.— Т. 20.— С. 366.

ронных оболочек атомов, процессов испускания и поглощения света атомами и кончая свойствами атомов и молекул, их химическими взаимодействиями. Разобраться в многообразии этих явлений эмпирически невозможно.

*Вторая функция теории* — приумножение, добыча знаний. На переднем фронте физических исследований эксперимент тесно связан с теорией. Эксперимент не проводится вслепую; в нем ищется ответ на поставленный экспериментаторами перед природой вопрос, т. е. проверяется некоторое теоретическое предположение, или гипотеза.

После того как основные законы теории найдены и сформулированы на языке математики, из них получают множество конкретных выводов, обогащающих знания человечества. Таким образом, теория содержит не только готовые знания, но и определенный способ мышления. Теория отражает структуру и последовательность мышления человека, познающего окружающий мир: от фактов и эксперимента к центральному обобщению — закону, от него — к конкретным выводам — следствиям, применяемым на практике. Мышление, развертывающееся по этой схеме, характерно для нашего времени и известно под названием научно-теоретического.

«Высшим судьей» для любых теоретических построений и выводов является эксперимент, практическая деятельность людей. Истинность теории подтверждается не только специально поставленными «решающими» опытами, но и производственной деятельностью общества, причем тысячекратно, ежедневно и ежечасно. Например, принцип постоянства скорости света проверялся в специальных опытах, а вытекающая из принципов теории относительности формула $E = mc^2$ подтверждается работой промышленных ядерных реакторов.

*Третья функция теории* состоит в передаче знаний, накопленных человечеством, следующим поколениям. Теория как форма знания неразрывно связана с этой учебной задачей, стоящей перед обществом. Если нужно подчеркивать роль эксперимента в физических исследованиях, то в той же мере необходимо подчеркивать роль теории при обучении физике. Фундаментальная физическая теория содержит готовые знания, всесторонне проверенные на опыте и на практике. Знаниям специально придается целесообразная форма для передачи их при обучении — это и есть изложение теории в том или ином учебном курсе.

При изучении теории должны передаваться не только знания фактического материала, но и содержащийся в ней способ мышления. Овладев теоретическим мышлением, молодой человек не только разберется в ее готовых выводах, но и решит еще не решенные задачи, откроет неизвестные явления. Последнее чрезвычайно важно в педагогическом плане. Материальный мир в своих конкретных проявлениях неисчерпаемо богат и многообразен, поэтому рассматривать обучение как овладение суммой знаний недостаточно; все факты узнать и запомнить невозможно. Овладеть знанием — это значит овладеть способом познания, научиться правильно мыслить.

**Задачи курса теоретической физики в пединституте.** В соответ-

ствии со сказанным выше о соотношении между экспериментом и теорией ясно, что деление физики на экспериментальную и теоретическую достаточно условно. Прогресс в познании окружающего мира был достигнут человечеством посредством специализации наук. Поэтому физики-исследователи специализируются как экспериментаторы и как теоретики. Если первые ставят физические опыты, то вторые решают дифференциальные уравнения. Для отражения специфики экспериментального и теоретического методов исследований и в силу причин методического характера курс физки в пединституте (и университете) делится на курс общей физики и курс теоретической физики. В курсе общей физики накапливаются знания о физических явлениях, фундаментальных опытах, основных законах. Хотя в нем и изучаются элементы физических теорий, в целом в курсе осуществляется так называемый феноменологический подход, т. е. делается упор на сами явления, показ их на опытах, изучение отдельных законов. В курсе теоретической физики материал общей физики обобщается и подробно изучаются фундаментальные физические теории: классическая механика, теория относительности, электродинамика, квантовая механика, статистическая физика и термодинамика. Эти теории, каждая в своей области применения, с единых позиций описывают все физические явления, т. е. дают возможность понять, предсказать и рассчитать их. Названные фундаментальные теории применяются и в заключительных разделах курса теоретической физики — микроскопической теории вещества и физике атомного ядра и элементарных частиц.

Перед курсом теоретической физики ставятся следующие педагогические задачи:

а) теоретически обобщить совокупность знаний студентов по курсу общей физики, дать единую физическую картину мира;

б) познакомить студентов с математическими методами исследования и математическим аппаратом, применяемым в основных разделах теории для решения конкретных задач;

в) дать прочную теоретическую основу для преподавания курса физики в средней школе.

Этими задачами обусловлена специфика изложения материала в нашем курсе. На первый план везде выдвигается идейная и эвристическая сторона теории, раскрывается механизм и сущность явления, дается физическая интерпретация математических моделей и выводов теории. Что касается конкретных задач, традиционно решаемых в существующих курсах, то число их ограничивается самыми необходимыми.

**Предмет и метод теоретической физики.** Одним из исходных понятий в науке является понятие структуры. Структура есть множество объектов, которые имеют прочные устойчивые связи между собой. *Физика изучает простейшие материальные структуры — элементарные частицы, атомы, молекулы, тела, поля, системы тел и полей, их строение, взаимодействие и движение.* Это объект всей физической науки, в том числе и теоретической физики.

Чтобы определить предмет теоретической физики, необходимо

ввести еще одно общее понятие — понятие модели. Под *моделью подразумевается мысленно представляемая или материально реализуемая система, которая, отражая или воспроизводя объект исследования, способна заменить его так, что ее изучение даст нам новую информацию об этом объекте.* Особенно важны так называемые знаковые модели, где объекты заменяются словами или символами — знаками. В физике, как и в некоторых других науках, широко применяются специальные знаковые модели — математические.

*Предметом теоретической физики являются математические модели, заменяющие реальные физические объекты.*

*Метод теоретической физики представляет собой математический анализ этих моделей,* направленный на выявление их особенностей, свойств, связей между собой в тех или иных конкретных условиях. Полученный математический результат обязательно отображается на материальную структуру; выводы теории применяются на практике, проверяются в экспериментах.

В отношениях и связях между теоретической физикой и математикой имеются важные особенности.

Математический объект (число, вектор, функция, уравнение и т. д.) не полностью адекватен заменяемому им физическому объекту. Он отражает его главные черты, связи, но не охватывает всего многообразия свойств и связей объекта. Это всегда модель, и результаты ее изучения имеют характер относительной, а не абсолютной истины, они применимы в определенных рамках, границах. Например, понятие материальной точки в механике как объекта бесконечно малых размеров применимо примерно до $10^{-6}$ см. Для объектов меньших размеров — атомов и молекул — понятие микрочастицы имеет другое содержание. Приведем еще пример. Чрезвычайно широкое применение в физике имеют математические понятия непрерывности и бесконечно малых (элементарных) величин. Однако понятие непрерывности материи в механике и макроскопической электродинамике применимо лишь до тех пор, пока имеют дело с малыми объемами, содержащими очень большое количество дискретных микрочастиц. Соответственно элемент объема в физике — вовсе не математическая бесконечно малая величина, он может уменьшаться лишь до тех пор, пока не скажется дискретность вещества (атомно-молекулярная структура).

Математическое исследование модели имеет смысл при условии, что его выводы реализуются в материальных объектах, заменявшихся моделью. Но не все математические решения какой-либо задачи имеют физический смысл. Конечным критерием истинности математического результата служит соответствие его данным опыта и наблюдения.

Точное решение математических задач, возникающих в теоретической физике, часто либо недостижимо, либо не имеет большого практического значения. Дело в том, что применение выводов на практике связано с измерениями, а последние всегда ограничены той или иной точностью. Отсюда приближенный расчет в рамках необходимой степени точности вполне удовлетворяет потребности практи-

ки. Это, однако, не означает, что в теоретической физике вообще низка точность результата. В некоторых разделах и задачах достигается высокая степень точности, еще недоступная эксперименту.

Итак, физика в отличие от математики имеет дело с материальными структурами. Лишь на определенном этапе изучения они заменяются математическими моделями. Из истории науки известно, что потребности физики побуждали к развитию целые математические отрасли (например, дифференциального и интегрального исчисления в связи с задачами механики). В свою очередь физика находила в математике готовый математический аппарат (например, теория линейных самосопряженных операторов в квантовой механике, теория групп).

**Цикл познания и структура теории.** При изучении теоретической физики полезно иметь представление о цикле познания в социально-историческом процессе, отражающемся в структуре физической теории. Цикл в общих чертах представляется в следующем виде:

1. В процессе познания выделяются элементы знания, исходные для цикла. Они добываются экспериментально. Этому этапу в сложившейся теории соответствует основание (см. таблицу на форзаце). К основанию относится модель материальных объектов и взаимодействий (или идеализированный объект теории), а также описывающие их основные физические величины. Так, например, основная модель материального объекта в механике — материальная точка, модель взаимодействия — действие материальных точек на расстоянии между собой, исходные положения и величины — система отсчета, скорость, ускорение, масса, сила.

2. В процессе осмысливания множества фактов, частных законов возникают обобщения, которые отражают в себе сущность и единство рассматриваемых явлений. Выдвигается система постулатов, выражающих ядро теории. Под ядром теории понимаются общие законы или принципы, которые определяют связи между физическими величинами, устанавливая изменение последних во времени и в пространстве. Как правило, ядро современной теории составляет система дифференциальных уравнений. Например, ньютонова механика основана на трех постулатах (законах Ньютона) и принципе суперпозиции сил. Все эти положения имеют математическую форму. В ядре физической теории особая роль принадлежит законам сохранения энергии, импульса, момента импульса, а также ряда других величин. Основные уравнения теории должны быть согласованы с законами сохранения — только при этом уравнения правильно отражают природу. В ядро входят положения об инвариантности основных уравнений по отношению к некоторым преобразованиям, основные константы теории.

3. Из ядра теории с помощью логических умозаключений и математического анализа получают конкретные выводы или следствия теории. Они имеют смысл частных законов, отдельных физических фактов, значений физических величин и т. д. и часто оформляются как некоторые физические задачи. Разработка и развитие теории состоят в решении ее задач.

Для физической теории характерны количественные выводы, т. е. функциональные зависимости между различными физическими величинами. Число физических величин в процессе разработки теории возрастает по сравнению с исходными величинами в основании. Так, например, в механике после формулировки законов Ньютона вводятся энергия, импульс, работа и другие величины.

Общее требование, предъявляемое к теории, отчетливо сформулировано М. Борном: «...ценность теории тем выше, наше доверие к ней тем больше, чем меньше в ней свободного выбора, чем больше ее логическая принудительность»[1]. Это значит, что для определенного круга явлений теория на основе системы своих понятий, исходя из ядра, с помощью однородных математических средств должна давать исчерпывающие выводы. В принципе теория должна давать конкретный вывод о любом объекте или явлении в своей области.

И наконец, важной особенностью теории является предсказание нового. Ядро теории потенциально содержит неизмеримо бóльшую информацию, нежели известная совокупность фактов из данной области физики. В процессе конкретных выводов раскрываются неизвестные ранее стороны и связи явлений, открываются новые свойства и новые явления. Это эвристический характер физической теории — ее неотъемлемая и замечательная черта.

Становление и развитие теории невозможно в отрыве от производственной деятельности общества. Развитие науки побуждается и обеспечивается прогрессом производства, открывая в свою очередь беспредельные возможности для преобразующей и созидающей деятельности человека.

Теоретическая физика, как и физика в целом, связана с развитием ряда других наук. Мы говорили уже, что физика опирается на математику. А на физику опираются другие, как фундаментальные, так и прикладные, науки. Физика изучает материальные структуры, исходные для таких наук, как химия, биология, т. е. составляет теоретическую базу этих наук. Велика и хорошо известна роль физики как основы современной техники, как лидера научно-технической революции.

## § 2. Пространство и время в физике. Исходные модели материальных объектов

**Геометрическая модель пространства и времени.** Пространство и время как формы существования материи для физической науки являются исходными понятиями. Основные свойства реального или физического пространства[2] отражаются в его геометрической модели, применимой во всех фундаментальных физических теориях, изложенных в этом курсе. *Физическое пространство моделируется геомет-*

---

[1] Борн М. Физика в жизни моего поколения.— М.: Изд. иностр. лит., 1963.

[2] Этот термин применяется для отличия пространства как формы существования материи от так называемых фазовых пространств — вспомогательных математических понятий, используемых в физике.

*рическим множеством точек.* Оио *непрерывно, однородно, изотропно, односвязно,* имеет *три измерения,* и в ием справедлива *геометрия Евклида.*

Для того чтобы различить точки в простраистве, примеияется *система отсчета.* Это тело или несколько иеподвижиых относительио друг друга тел отсчета, приборы для измереиия длин и времеии. К системе отсчета отиосится и иекоторая система координат, связаииая с телом отсчета. В системе отсчета с помощью измереиия расстояиий между двумя точками — длии отрезков — каждой точке простраиства ставятся в соответствие три действительиых числа $q_1$, $q_2$, $q_3$ — коордииаты точки в той или иной системе коордииат. Такой процесс иазывается *арифметизацией* простраиства. В математике ие рассматриваются методы и материальиые средства арифметизации. Для физики же измереиие длии отрезков — исходиая операция, без которой иикакие другие измереиия невозможиы.

Аиалогичио простраиству моделируется и время. Прииимается, что оио *непрерывно, однородно, одномерно, однонаправленно,* т. е. измеияется в одном иаправлеиии. Момеит времеии $t$ соответствует точке на оси времеии, промежуток времени — иитервалу между двумя точками на оси: $\Delta t = t_2 - t_1$. Время определяется с помощью часов, ход которых проверяется по эталонному физическому процессу, принятому за равиомериый. Предполагается, что часами может быть сиабжеиа каждая точка системы отсчета. Часы в разиых точках должиы быть *синхронизированы,* т. е. ход их должен быть согласоваи с помощью сигиалов точиого времени[1]. Одионаправлеиность времеии озиачает, что в любой системе отсчета показаиия всех часов моиотоиио возрастают.

Нужио подчеркиуть, что арифметизация простраиства и времеии зависит от выбора системы отсчета и процессов измерения в ней. Используются различиые системы отсчета, связаииые с разиыми телами отсчета и сиабжеиные разиыми системами коордииат. Обозиачим одиу из систем буквой $K$. Пусть в ией произошло событие в точке с коордииатами $q_1$, $q_2$, $q_3$ в момеит времеии $t$. Обозиачим событие совокупиостью этих чисел: $q_1$, $q_2$, $q_3$, $t$. В любой другой системе $K'$ коордииаты и время того же события будут: $q'_1$, $q'_2$, $q'_3$, $t'$.

Результаты измереиий зависят от выбора систем коордииат и имеют поэтому *относительный* характер.

Влияет иа результаты измерений и сам процесс измереиий: при определении положеиия материальиой точки в простраистве происходит взаимодействие ее с измерительиым прибором. Влияиие этого взаимодействия иа материальную точку в макромире может быть сделаио малым и не учитывается, ио в микромире оио существеиио измеияет состояиие микрочастицы.

Отиосительиый характер результатов измереиий и их влияние иа объект измереиий отражаются в важиейших закоиах физики; это влияиие иеустраиимо, и с иим следует считаться, чтобы получить объективную информацию о материальном мире.

[1] О синхроиизации часов в различных системах см. ниже: ч. I, § 1, ч. II, § 1.

Принятая модель непрерывного пространства и непрерывного времени является обобщением опыта, т. е. она соответствует свойствам реального физического пространства. Так, возможны прямые измерения расстояний вплоть до $10^{-6}$ см и времени (радиотехническими средствами) до $10^{-11}$ с. До этих пределов пространство и время остаются непрерывными. В области меньших пространственных и временных интервалов прямые измерения невозможны, но о непрерывности пространства и времени можно судить по косвенным данным, т. е. по совпадению с экспериментом теоретических выводов, основанных на предположении о непрерывности. Эти предположения сейчас подтверждаются вплоть до самых малых расстояний, изученных с помощью соударений элементарных частиц.

Обсудим однородность и изотропность пространства и однородность времени. Однородность — это равноправие всех точек, а изотропность — равноправие всех направлений в пространстве. Эти свойства называют также симметриями пространства.

Однородность времени приводит к закону сохранения энергии, однородность пространства — к сохранению импульса, а изотропность — к сохранению момента импульса. Вся огромная совокупность экспериментальных фактов современной физики находится в согласии с названными законами сохранения, что и говорит об однородности пространства и времени и изотропности пространства. Но очень важно отметить, что однородность и изотропность пространства и времени имеют место не во всех системах отсчета, а только в части из них, называемых *инерциальными*.

Поясним, что следует понимать под евклидовостью пространства. Это справедливость для него геометрии Евклида. В макроскопической области пространства геометрия Евклида подтверждена всей человеческой практикой. И в микроскопической области ее подтверждает совпадение выводов теорий, использующих данную модель пространства, с результатами наблюдений и экспериментов, вплоть до самых малых изученных расстояний. Что касается мира очень больших расстояний — мегамира, то, по современным представлениям, пространство в целом, и особенно вблизи массивных тел, искривлено, т. е. имеет место отклонение от геометрии Евклида. Однако для области, изучаемой нами в фундаментальных теориях, эти отклонения несущественны.

Итак, рассмотренная модель пространства и времени соответствует свойствам физического пространства в области, сверху ограниченной большими расстояниями (порядка размеров Солнечной системы), а снизу — самыми малыми расстояниями, достигнутыми сейчас между элементарными частицами порядка $10^{-16}$ ... $10^{-17}$ см. Соответствующая нижняя граница временных промежутков имеет порядок $10^{-26}$ ... $10^{-27}$ с.

Следует иметь в виду, что данная модель неабсолютна: дальнейшее проникновение человека в мегамир и микромир может повести к ее уточнению. Может оказаться, что в неизученных малых областях, при расстояниях, меньших $10^{-17}$ см, свойства пространства окажутся иными. (В частности, есть основания ожидать дискретности,

зернистости пространства вместо его непрерывности в области с размерами порядка $10^{-33}$ см.) То же относится и к очень малым промежуткам времени. Таким образом, речь идет именно о модели пространства и времени, отражающей в указанной выше физической области важнейшие его свойства, но, по всей вероятности, не исчерпывающей всех свойств.

**Классическая, полевая и квантово-релятивистская модели материальных объектов.** Как уже говорилось выше, физика изучает строение, движение и взаимодействие материальных объектов на исходных и простейших структурных уровнях деления и взаимодействия материи. Общее представление о структурных единицах деления материи и их размерах дается в таблице на переднем форзаце.

По современным представлениям, Вселенная безгранична, но может быть как бесконечной, так и конечной по размерам: радиус конечной Вселенной в настоящее время оценивается как величина $\sim 10^{26}$ м, а общая масса $\sim 10^{41}$ кг. Предполагается, что бóльшая часть массы Вселенной сосредоточена в звездах, число которых составляет $\sim 10^{23}$. В таком случае во Вселенной $10^{80}$ стабильных частиц — протонов и нейтронов, образующих вещество.

Но при наличии сил всемирного тяготения между звездами и их большими системами — галактиками Вселенная не может быть стационарной — она должна сжиматься или расширяться. Из астрономических наблюдений известно, что галактики разбегаются от центра с высокими скоростями. Это значит, что Вселенная не всегда была такой, какой мы ее наблюдаем. Эволюция Вселенной началась 10...20 млрд. лет тому назад со сверхплотной системы фотонов, электронов, протонов и нейтронов (и некоторых других частиц), составляющих смесь при чрезвычайно высокой температуре (они образовались в самом начале эволюции). Далее происходит расширение сначала взрывного характера, а затем замедляющегося. Оно сопровождается понижением температуры, образованием ядер водорода и гелия (позднее они соединяются в ядра остальных известных элементов). К ядрам присоединяются электроны, и образуются атомы вещества, а из них — звезды, планеты. Вселенная приобретает современный вид. Будет ли продолжаться расширение Вселенной далее или оно сменится сжатием, это зависит сейчас от средней плотности материи в пространстве. В теории известно критическое значение плотности материи $5 \cdot 10^{-27}$ кг/м$^3$. По современным оценкам, плотность материи по Вселенной имеет порядок $2 \cdot 10^{-27}$ кг/м$^3$. Если это так, Вселенная будет расширяться и далее. Но есть основания считать, что далеко не вся масса материи сосредоточена в звездах. Если элементарные частицы (нейтрино) обладают массой, то масса Вселенной за счет потоков нейтрино много больше массы звезд. В таком случае в будущем расширение Вселенной сменится сжатием, которое будет продолжаться до сверхплотного состояния.

В настоящее время материя в макромире известна в двух видах: в виде *вещества,* из которого состоят все тела, и в виде *электромагнитного* и *гравитационного* полей, заполняющих пространство и передающих действие тел друг на друга.

Для изучения материального мира его объекты — тела, элементарные частицы, электромагнитные поля и др.— заменяют моделями. Различаются следующие основные модели материальных объектов.

*Классическая, или механическая, модель.* Применяется для изучения материи в макромире в виде вещества, т. е. тел. Классической моделью служит *материальная точка.* Это точка, которой заменяют конечное тело для изучения, если размерами его можно пренебречь по сравнению с расстоянием между телами. Материальная точка наделяется массой всего тела. В классической модели тел допускается непрерывное распределение вещества в пространстве, поэтому материальная точка может выступать и как элемент объема тела, объект бесконечно малый по сравнению со всем телом. Положение материальной точки определяется в пространстве ее координатами, которые можно измерить в каждый момент времени. В тот же момент времени можно измерить и скорость движения материальной точки.

*Система материальных точек* моделирует систему тел, протяженное тело. Например, твердое тело — это непрерывная система материальных точек с неизменными расстояниями между ними. Существенно отметить, что для тела имеет место свойство непроницаемости, означающее, что в одном и том же месте пространства не могут находиться два тела конечных размеров.

*Полевая модель.* Она применяется для изучения материи в виде макроскопического физического поля. Массой поле не обладает, т. е. не сводится к системе материальных точек. Поле в пустом пространстве занимает большие области без четких границ, а энергия распределена в поле непрерывно. Существует всего два различных макроскопических поля — гравитационное и электромагнитное. Они свойством непроницаемости не обладают, т. е. могут одновременно находиться в одном и том же месте пространства. Моделируется физическое поле с помощью *математического поля физической величины,* принимающей в каждой точке пространства определенное значение. Так, электрическое поле моделируется непрерывной векторной функцией $\vec{E}(x, y, z)$, являющейся напряженностью поля; магнитное — индукцией поля $\vec{B}(x, y, z)$; гравитационное — ускорением силы тяготения $\vec{g}(x, y, z)$. Итак, полевая модель представляет собой некоторую функцию координат точки пространства.

*Квантово-релятивистская модель* применяется для изучения материи в микромире, где материя представлена только элементарными частицами очень малых размеров. Все макроскопические тела состоят из элементарных частиц протонов, нейтронов, электронов, имеющих массу. Электромагнитное поле состоит из фотонов, частиц без массы, но обладающих энергией; гравитационное — из гипотетических безмассовых гравитонов. (Имеются и другие элементарные частицы, изучающиеся в конце курса.)

Элементарные частицы моделируются *точками,* обладающими энергией и (отличной от нуля или нулевой) массой. Эти точки называются *микрочастицами* (или просто частицами). Между материальной точкой (моделью тела) и микрочастицей (моделью элементарной

частицы) есть существенная разница, связанная с практическим определением их положения в пространстве. Для микрочастицы одновременное определение координат и скорости не всегда возможно, так как взаимодействие с прибором при измерении координат изменяет скорость, а для материальной точки это взаимодействие несущественно.

**Универсальные физические величины.** Физические объекты — тела, поля, элементарные частицы — отличаются друг от друга рядом свойств, характеризующихся физическими величинами. Универсальными, т. е. применимыми во всей изученной области пространства, являются энергия $E$ тела, его импульс $\vec{p}$, момент импульса $\vec{L}$[1]. Эти же величины характеризуют элементарные частицы. Что касается макроскопического поля, то оно обладает энергией, импульсом и моментом, распределенным в пространстве с той или иной плотностью. Масса как характеристика инертных свойств тел, проявляющихся при изменении скорости, для макроскопического поля не вводится, так как поле состоит из частиц, движущихся во всех случаях с одной и той же скоростью $c = 3 \cdot 10^8$ м/с; их масса, как уже говорилось, равна нулю.

Для микрочастиц имеется универсальная формула, связывающая их энергию, импульс, массу:

$$E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}\,. \qquad (1.\text{В})$$

Здесь константа $c = 3 \cdot 10^8$ м/с равна скорости распространения электромагнитных волн в вакууме. Формула (1.В) проверена в огромном числе опытов с элементарными частицами.

В настоящее время известны только частицы с $E > 0$, т. е. в формуле берется арифметическое значение корня. Кроме того, обнаружены только частицы с $m^2 \geqslant 0$, а частицы с мнимой массой не найдены. Нет в природе и частиц с отрицательной массой, но имеются частицы с нулевой массой. Таким образом, (1.В) приводит к двум видам связи энергии и импульса: первый — формула (1.В) и второй — для частицы с $m = 0$:

$$E = cp. \qquad (2.\text{В})$$

Формула (1.В), справедливая для микрочастиц с $m \neq 0$, применима и для тел, так как тела состоят из этих частиц. Формула (2.В), справедливая для микрочастиц с $m = 0$, применима и для макроскопических полей, так как поля состоят из безмассовых частиц.

Для покоящейся микрочастицы $p = 0$, и из (1.В) имеем:

$$E = mc^2. \qquad (3.\text{В})$$

Это энергия покоя, которой обладает микрочастица или тело.

В таблице на форзаце физический мир подразделен на области по пространственным масштабам. Формула (1.В) дает важный критерий классификации движений в нем по импульсам и энергиям: если $p \ll mc$, то область называется *классической,* если $p \approx mc$ или $p > mc$ — *релятивистской,* а при $p \gg mc$ — *предельно релятивистской.*

---

[1] Имеются и другие величины, характеризующие физические объекты, но сейчас мы их не рассматриваем.

В релятивистской области кинетическая энергия сравнима с энергией покоя или больше ее. Соответственно в ультрарелятивистской области при $p \gg mc$ связь энергии и импульса выражается приближенно формулой (2.В). Вся энергия может быть отнесена к кинетической, как и для частиц с нулевой массой.

Указанное деление физических явлений на релятивистские и нерелятивистские существенно для фундаментальных физических теорий. Так, классическая механика относится к нерелятивистской теории, а электродинамика — к релятивистской. Что касается теорий, описывающих микрочастицы, то у них есть как нерелятивистские, так и релятивистские части. Например, в нашем курсе квантовая механика рассматривает нерелятивистские движения микрочастиц, тогда как эти движения могут быть и релятивистскими. Мы изучаем нерелятивистскую статистическую физику, хотя имеется и релятивистское ее обобщение.

## § 3. Фундаментальные взаимодействия и законы сохранения

**Фундаментальные взаимодействия.** До сих пор рассматривались так называемые *свободные* материальные точки и мирочастицы. Они были свободны от действия на них других точек и частиц, т. е. уединены или изолированы от них. Если несколько материальных частиц или точек находятся на конечных расстояниях друг от друга, то между ними происходит взаимодействие. *Взаимодействие приводит прежде всего к изменению энергии, импульса и момента импульса взаимодействующих точек,* т. е. к изменению состояния системы точек. Взаимодействовать между собой могут макроскопические тела, тела и поля, а также микрочастицы.

Различают два основных проявления взаимодействия: *динамическое,* при котором изменяется характер движения тел или микрочастиц (например, камень, притягиваясь к Земле, падает на нее с ускорением, $\alpha$-частица, проходя около ядра атома, изменяет направление скорости), и *статическое,* при котором тела или частицы объединяются в устойчивую систему (например, нуклоны — в ядро, электроны и ядро — в атом, атомы — в тело и т. д.).

Со взаимодействием тесно связано важное для физики понятие силы. В физике о силе говорят как о действии одной материальной точки на другую, это часть взаимодействия двух точек. Количественная мера силы устанавливается по результатам взаимодействия: по ускорениям материальной точки или по деформации твердого тела.

Взаимодействия характеризуют величиной силы, действующей на материальную точку, или изменением энергии взаимодействующих частиц.

Все многообразие проявлений окружающего нас мира — физические явления, свойства и строение физических объектов, их движение обусловлено взаимодействиями. Конкретных взаимодействий происходит великое множество, но в настоящее время выяснено, что все они могут быть отнесены к четырем типам исходных или *фундаментальных* взаимодействий. Фундаментальные взаимодействия от-

личаются друг от друга расстоянием, на котором они проявляются, отношением сил, энергиями, приходящимися на микрочастицу,— интенсивностью, характерным временем протекания процессов, вызванных в мире элементарных частиц (см. табл. 1).

Таблица 1

**Фундаментальные взаимодействия**

| № п/п | Тип взаимодействия | Относительная интенсивность | Радиус действия, м | Характерное время, с |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Сильное | 1 | $\approx 10^{-15}$ | $\approx 10^{-23}$ |
| 2 | Электромагнитное | $\approx 10^{-2}$ | $\infty$ | $\approx 10^{-20}$ |
| 3 | Слабое | $\approx 10^{-10}$ | $\approx 10^{-18}$ | $\approx 10^{-13}$ |
| 4 | Гравитационное | $\approx 10^{-38}$ | $\infty$ | ? |

*Гравитационное* взаимодействие универсально, т. е. проявляется для любых материальных объектов, но существенно оно только при наличии массивных тел, следовательно, на макроскопических расстояниях. *Электромагнитное* взаимодействие на много порядков интенсивнее гравитационного, но так как оно имеет место только для заряженных тел и частиц, то в макромире, где тела часто электронейтральны, уступает гравитационному взаимодействию. Однако в микромире электромагнитное взаимодействие, сильное, слабое, играет существенную роль, а гравитационное на их фоне при взаимодействии микрочастиц на малых расстояниях незаметно. *Сильное* и *слабое* взаимодействия имеют место только в микромире, на самых малых расстояниях между частицами, причем сильное превосходит электромагнитное. Подробно свойства и проявления взаимодействий изучаются в конце курса теоретической физики, а сейчас знакомство с ними необходимо для общего взгляда на физические явления и фундаментальные физические теории.

**Основные модели взаимодействия.** Выше рассмотрены модели материальных объектов. Обсудим теперь модели взаимодействия этих объектов между собой, применяемые в макро- и микромире.

*Механическая модель.* Механическая система состоит из тел, моделируемых материальными точками, расположенными на некотором расстоянии друг от друга в пустом пространстве. Никаких других объектов в системе нет. Взаимодействие между ними осуществляется на расстоянии, передаваясь мгновенно. Такое взаимодействие называют *дальнодействием.* Результат взаимодействия состоит в непрерывном изменении импульса и кинетической энергии материальных точек при их движении в пространстве: точки движутся с ускорением. Механическая модель взаимодействия применяется в определенных условиях. Она относится к макромиру и к нерелятивистской области движения. Это значит, что не принимается в расчет конечная скорость передачи взаимодействий, а вместе с тем и их переносчик — физическое поле. Механическая модель применима только к гравитационному и электромагнитному взаимодействиям.

*Полевая модель* применяется к системе электрически заряженных тел и электромагнитного поля. Взаимодействие осуществляется посредством поля, т. е. на заряженную материальную точку действует поле, созданное другими точками, а не сами эти удаленные точки. Такое взаимодействие называется *близкодействием*. В результате взаимодействия изменяются непрерывно как характеристики поля, так и движение материальных точек. Движение материальных точек может быть как классическим, так и релятивистским. Что касается поля, то это предельно релятивистский объект, так как распространяется в пространстве со скоростью $c$.

*Квантово-релятивистская модель.* Система состоит из микрочастиц. Передача взаимодействия между микрочастицами с отличной от нуля массой осуществляется другими частицами — *квантами поля*. Взаимодействие состоит в том, что две частицы обмениваются третьей — переносчиком взаимодействия. Для электромагнитного взаимодействия им является фотон, сильного — глюоны, $\pi$-мезоны, а слабого — промежуточные бозоны ($W^+$, $W^-$, $Z^\circ$). Что касается гравитационного взаимодействия, то его проявления на микроуровне экспериментально не обнаружены, а предполагаемый переносчик — гравитон — не найден.

В результате взаимодействия микрочастицы не только изменяют состояние движения, но и претерпевают *взаимные превращения* — исчезают одни и возникают другие (в рамках законов сохранения энергии, импульса, электрического заряда и некоторых других величин). Квантово-релятивистская модель применяется в микромире при высоких, релятивистских, энергиях микрочастиц.

**Законы сохранения.** Система тел, полей, микрочастиц называется *изолированной*, если не испытывает взаимодействия со своим окружением: в нее не поступают и из нее не уходят какие-либо микрочастицы. В изолированной системе имеют место важнейшие для всей физики законы сохранения ряда физических величин. Это прежде всего законы сохранения энергии, импульса, момента импульса. Они являются универсальными для всех взаимодействий и всех физических явлений, потому что обусловлены свойствами пространства и времени. Рассмотрим законы сохранения с качественной стороны, используя модели взаимодействия.

Начнем с квантово-релятивистской системы. До взаимодействия микрочастицы свободны и каждая обладает энергией, импульсом, моментом. Соответствующие величины для всей системы определяются формулами

$$E = \sum_i E_i, \ \vec{p} = \sum_i \vec{p}_i, \ \vec{L} = \sum_i \vec{L}_i. \quad (4.В)$$

В результате взаимодействия энергия, импульсы, моменты отдельных частиц изменились, и после взаимодействия эти параметры системы приобрели значения:

$$E' = \sum_k E'_k, \ \ \vec{p}' = \sum_k \vec{p}'_k, \ \ \vec{L}' = \sum_k \vec{L}'_k.$$

Ответить на вопрос, изменяются ли энергия, импульс, момент

системы в результате взаимодействия или остаются неизменными, можно на основании опыта. В настоящее время вся огромная совокупность экспериментальных и наблюдательных данных говорит об их *строгом сохранении* для изолированной системы элементарных частиц.

Законы сохранения выражаются формулами

$$\sum_i E_i = \sum_k E'_k, \ \sum_i \vec{p}_i = \sum_k \vec{p}'_k, \ \sum_i \vec{L}_i = \sum_k \vec{L}'_k. \qquad (5.\text{В})$$

Весьма существенно, что при взаимодействии частицы, как таковые, не обязательно сохраняются: могут исчезать одни и возникать другие, но без нарушения равенств (5.В).

Для механической и полевой моделей, т. е. для тел и непрерывного поля, сохранение энергии, импульса, момента импульса оказывается следствием сохранения их в квантово-релятивистской системе. В самом деле, любая система материальных объектов в конечном счете состоит из элементарных частиц, а ее энергия, импульс, момент импульса определяются формулами (4.В). Если система изолирована, то названные величины сохраняются.

Остановимся еще на законе сохранения массы для механической системы. В квантово-релятивистской системе сóхраняется полная энергия системы, но масса отдельных частиц и масса системы не сохраняются, так как могут исчезать одни и образовываться другие частицы, в том числе безмассовые. Запишем формулу закона сохранения энергии с учетом (1.В) и (2.В):

$$\sum_i c\sqrt{p_i^2 + m_i^2c^2} + \sum_k cp_k = \sum_{i'} c\sqrt{p_{i'}^2 + m_{i'}^2c^2} + \sum_{k'} cp_{k'}. \qquad (6.\text{В})$$

Так как в классической модели материя представлена только материальными точками, взаимодействующими на расстоянии, то энергией поля, передающего взаимодействие, по сравнению с энергией покоя материальных точек следует пренебречь, а в формуле (6.В) опустить вторые суммы. Пренебрегая также кинетической энергией по сравнению с энергией покоя, получаем:

$$\sum_i m_i c^2 = \sum_{i'} m_{i'} c^2, \qquad (7.\text{В})$$

или

$$\sum_i m_i = \sum_{i'} m_{i'} \qquad (8.\text{В})$$

— масса изолированной механической системы материальных точек сохраняется. В этом же приближении справедливо положение об *аддитивности* массы. Масса тела равна сумме масс частей, на которые его разделили; при соединении двух или более тел в одно, масса образовавшегося тела равна сумме масс соединенных тел. (Но это заключение несправедливо для микрочастиц.)

## § 4. Фундаментальные физические теории

**Классическая механика.** В фундаментальных физических теориях, изучаемых в этом курсе, применяются рассмотренные выше модели взаимодействующих систем или их разновидности. Каждая из рассматриваемых ниже теорий охватывает широкий круг физических явлений и объектов, определяемый как пространственными рамками, так и структурным уровнем деления материи и видом взаимодействия.

В макромире для макротел не проявляются короткодействующие сильные и слабые взаимодействия, а имеют место лишь гравитационные и электромагнитные. Благодаря наличию электрических зарядов двух знаков тела электронейтральны. Поэтому решающее значение в макромире имеет гравитационное взаимодействие. Оно определяет движение небесных тел, их форму, макроскопическое строение. Сила тяготения вызывает и движение тел на Земле. Все эти случаи движения изучаются в классической механике.

В космическом пространстве и в земных условиях наряду с гравитационными существуют макроскопические электромагнитные поля. В механике рассматривается движение под действием статических гравитационных и электромагнитных сил. Например, механика применяется, когда на тело действует сила, которая определяется законом всемирного тяготения, законом Кулона, законом Ампера. В механическую модель укладываются и типичные для механики упругие силы, силы трения, сопротивления среды движению. Все они имеют электромагнитное происхождение: при контакте двух тел заряды одного оказываются вблизи от зарядов другого, что приводит к появлению названных выше сил.

Итак, гравитационные и электромагнитные силы определяют всю огромную совокупность механических движений макроскопических тел. Они вызывают непрерывное изменение импульсов тел, их ускоренное движение. Для решения вопроса о движении тела в каждом конкретном случае необходимо знать силу. Если сила известна, то рассчитывается движение материальной точки, т. е. находятся ее положение в пространстве, скорость и ускорение в каждый момент времени. Если же задано движение, определяется сила. Эти задачи решаются с помощью законов Ньютона, составляющих ядро механики.

**Классическая электродинамика.** Область применимости этой теории — макромир. В ней изучается макроскопический переносчик электромагнитного взаимодействия — электромагнитное поле. Оно и создается электрическими зарядами и действует на заряды. Используется полевая модель материи и взаимодействия. Ядро теории составляют уравнения Максвелла, позволяющие по заданному распределению и движению электрических зарядов находить электромагнитное поле и, наоборот, по заданному полю — распределение и движение создавших его зарядов.

Исторически непосредственно к электродинамике примыкает специальная теория относительности (СТО), в которой окончательно утверждается истолкование электромагнитного поля как отличного

от вещества вида материи. Но сама по себе СТО есть теория пространства и времени инерциальных систем, поэтому она лежит в фундаменте всей физики. (В нашем курсе излагается после классической механики.)

**Квантовая механика.** Движение микрочастиц в области пространства от $10^{-8}$ до $10^{-15}$ м (и менее) относится к квантовой механике. Она изучает строение атомов, процессы излучения и поглощения света атомами.

В указанной области электромагнитные взаимодействия играют решающую роль, потому что гравитационные по сравнению с ними исчезающе малы, а сильные и слабые еще не «включились» из-за большого для них расстояния. Особенно важно, что электромагнитные взаимодействия приводят к соединению микрочастиц в системы, находящиеся в устойчивых (стационарных) состояниях. Так соединяются ядра и электроны в атомы, в молекулы, в кристаллы. Но эти же взаимодействия ионизируют атомы, приводят к распаду ядер и т. д. Процессы перестройки в системах заряженных частиц ведут к поглощению и излучению квантов электромагнитного поля, т. е. излучению и поглощению света. Круг физических явлений, вызываемых электромагнитными взаимодействиями в указанном диапазоне, чрезвычайно широк: к ним относятся все химические реакции и биологические процессы.

Ядро квантовой механики составляет уравнение Шредингера, позволяющее по заданному взаимодействию находить состояние и физические характеристики системы, решать вопрос об изменениях состояния во времени.

К квантовой механике примыкает квантовая электродинамика. Ее предмет — электромагнитное взаимодействие электронов (и позитронов) с фотонами и между собой. В квантовой электродинамике используется квантово-релятивистская модель взаимодействующей системы.

Названные выше теории, кроме квантовой электродинамики, изучаются в курсе теоретической физики пединститута. В них фигурируют гравитационные и электромагнитные взаимодействия. Сильные и слабые взаимодействия проявляются в пространственном интервале от $10^{-15}$ до $10^{-18}$ м, и вместе с электромагнитными взаимодействиями они ответственны за строение и свойства атомных ядер, элементарных частиц; обеспечивают процессы взаимных превращений на последнем, доступном сейчас для изучения структурном уровне элементарных частиц. Последовательной и всеобъемлющей теории этих взаимодействий и элементарных частиц пока еще нет, хотя многие экспериментальные факты уже обобщены. Здесь наиболее фундаментален теоретический подход, базирующийся на квантово-релятивистской модели взаимодействия и законах квантовой механики.

Следует отметить, что расстояния $10^{-18}$ ...$10^{-19}$ м — последний достигнутый сейчас пространственный порог. При дальнейшем уменьшении расстояний выявляются новые физические законы микромира. Уже сейчас открыты субэлементарные частицы — кварки, из которых состоят все тяжелые элементарные частицы. Ожидают также объеди-

нения всех фундаментальных взаимодействий в единое взаимодействие. Первый шаг на этом пути сделан: электромагнитное и слабое взаимодействия объединены в одно электрослабое, причем теоретические выводы на этот счет подтверждены опытами, проводившимися на пределе самых малых достигнутых расстояний и самых высоких энергий частиц.

**Статистическая физика.** Многие физические объекты представляют собой системы тел или частиц. Таковы, например, Солнечная система, атом вещества, газ, состоящий из множества молекул, и т. д. Если система состоит из небольшого числа материальных точек, то она изучается в классической механике; из микрочастиц — в квантовой механике. Если же число частиц в системе очень велико, как, например, в макроскопических телах, то применить к ним механику невозможно. Такие системы изучаются в статистической физике.

Так как вещество состоит из огромного числа частиц — атомов и молекул, а тепловые явления объясняются их хаотическим движением, то статистическая физика изучает тепловые движения. Но, вообще говоря, область статистической физики значительно шире, она распространяется на системы из *большого числа* произвольных объектов. Статистика — это общефизическая теория, ее метод применим к исследованию газов, жидкостей, твердых тел, атомного ядра, явления распространения света и взаимодействия его с веществом, строения и эволюции звезд и т. д. Это означает, что статистический метод применяется не только к механической системе, но и к квантовомеханической и квантово-релятивистской.

Основа статистики — микроканоническое распределение, или каноническое распределение Гиббса. Ее фундаментальная и принципиально новая по сравнению с классической механикой идея состоит в признании случайного, вероятного значения основных параметров микрочастиц в системе. Для всей их совокупности выполняется некоторое распределение, т. е. закон, обусловленный большим числом компонентов системы. Такие законы и называются статистическими.

Статистике исторически предшествовала термодинамика — учение о тепловых процессах, базирующееся на феноменологических принципах — началах термодинамики. Статистическая физика дала обоснование законам термодинамики, раскрывая внутренний механизм тепловых процессов. В настоящее время в науке применяются как статистические, так и термодинамические методы исследования физических явлений.

**Динамические и статистические причинно-следственные связи в физике.** После знакомства с физическими теориями остановимся на положении, проявляющем себя во всех физических теориях — на причинно-следственной связи между явлениями. *Явление А называется причиной, а явление В — следствием, если в результате наличия (или наступления) А возникает (наступает) явление В, причем А оказывается необходимым и достаточным условием В.* Описывая и изучая взаимосвязь и взаимообусловленность физических явлений, все физические теории устанавливают между физическими явлениями, событиями, состояниями причинно-следственные связи.

Общая причина движений, состояний, свойств физических объектов — взаимодействия между объектами и взаимодействия внутри объектов. Однако в каждом частном случае имеется своя конкретная причинно-следственная связь. Например, движение тела в механике полностью определяется силой, действующей на тело, положением и скоростью тела в некоторый начальный момент времени. По этим данным однозначно определяется положение и скорость его в любой другой момент времени. Иными словами, взаимодействия, положения и скорости материальных точек механической системы в некоторый момент времени есть причины, однозначно определяющие дальнейшее движение — следствие. По характеру причинно-следственных связей физические теории неоднородны. Так, классическая механика и электродинамика относятся к динамическим теориям, в которых эта связь однозначна: причина $A$ порождает одно следствие $B$. Но статистическая физика относится к другому виду теорий с неоднозначной причинно-следственной связью: для отдельной частицы (в системе с большим их числом) причина $A$ порождает не одно, а несколько следствий ($B_1$, $B_2$, $B_3$ и т. д.) с различной вероятностью наступления. Однозначной закономерность становится только для большого числа частиц, т. е. закономерность имеет вероятностно-статистический характер. Например, если вероятность следствия $B_1$ равна 0,1, то однозначно предсказания для одной частицы сделать нельзя, а для миллиона частиц событие наступит с очень небольшими отклонениями для ста тысяч, т. е. *почти* однозначно.

Квантовая механика также принадлежит к теориям с вероятностно-статистической закономерностью: в ней положение и скорость отдельной частицы носят вероятностный характер в отличие от положения и скорости материальной точки в классической механике.

**Иерархия расстояний — взаимодействий — теорий. Рамки современной физической картины мира.** Во вводной главе курса вы познакомились с особенностями теоретического исследования природы в физике. Опираясь на самые основные понятия физики, составили некоторое представление о физической картине мира. Физические явления, свойства физических объектов, формы движения материи оказались обусловленными пространственными интервалами и соответствующими им фундаментальными взаимодействиями. Наблюдается своеобразная иерархия взаимодействий и физических теорий, соподчинение их в рамках изучаемых пространственных областей. Из таблицы 2 видно, что тип взаимодействия, характер движения и описывающая его теория определяются размерами физических объектов и расстояниями между ними. Важно также, что качественно своеобразные формы движения материи, соответствующие различным структурным уровням ее деления, отличаются количественно — характерными энергиями. Это либо энергии движения, либо энергии связи (т. е. энергии, необходимые для деления системы на составляющие части). Характерные энергии можно сравнить с энергией покоя данного тела или частицы или между собой. Так, область классической механики определяется сильным неравенством $E \ll mc^2$, релятивистская область — сравниваемыми с энергией покоя значениями энергии

Таблица 2

**Объекты изучения физических теорий**

| Область пространства, м | Взаимодействие | Типичные явления | Раздел физики |
|---|---|---|---|
| $10^{13}$—$10^{-8}$ | Гравитационное, электромагнитное | Движение планет, тел на Земле, световые явления | Классическая механика, электродинамика |
| $10^{8}$—$10^{-8}$ | Гравитационное, электромагнитное | Тепловые явления в недрах звезд, планет, тел | Статистическая термодинамика |
| $10^{-10}$—$10^{-15}$ | Электромагнитное | Движение электронов в атоме | Квантовая механика |
| $10^{-10}$—$10^{-18}$ | Электромагнитное | Взаимодействие электронов и фотонов | Квантовая электродинамика |
| $10^{-13}$—$10^{-15}$ | Электромагнитное, сильное, слабое | Устойчивость и распады ядер | Теория ядра |
| $10^{-15}$—$10^{-18}$ | Электромагнитное, сильное, слабое | Взаимные превращения элементарных частиц | Теория элементарных частиц, теория сильных и слабых взаимодействий |

тел и частиц, а предельно релятивистская — энергиями частиц, значительно превышающими энергию их покоя. Порядок удельной, т. е. приходящейся на одну частицу, энергии (для микромира) виден из таблицы 3. Отсюда, в частности, следует, что проникновение в глубь строения материи требует все больших энергий. Соответственно

Таблица 3

**Порядок величин характерных удельных энергий связи и энергий покоя**

| № п/п | Вид энергии | Величина энергии |
|---|---|---|
| 1 | Энергия нуклона при движении макроскопического тела со скоростью 1 км/с (дается для сравнения) | $10^{-21}$ Дж $\approx$ 0,01 эВ |
| 2 | Энергия связи молекул (атомов) в твердом теле | 0,1...1 эВ |
| 3 | Энергия связи атомов в молекуле | 1...10 эВ |
| 4 | Энергия связи электронов в атоме | От нескольких эВ до нескольких кэВ |
| 5 | Энергия связи нуклонов в ядре | 1...10 МэВ |
| 6 | Энергия покоя электрона | 0,5 МэВ |
| 7 | Энергия покоя протона | 1 ГэВ |

использование процессов, происходящих на субэлементарном уровне строения материи, обещает огромные энергетические выходы.

В заключение заметим, что фундаментальные теории имеют относительный характер и ограниченные рамки применимости. Они части общего знания и этапы в процессе познания человеком неисчерпаемой природы. По мере развития наука обогащается новыми теориями, описывающими явления в еще не изученных пространственных областях. Сложившиеся же фундаментальные теории являются относительно устойчивыми и завершенными, их основные положения незыблемы и вполне надежны. Далее будут обобщаться исходные принципы фундаментальных теорий, выявляться единство связи фундаментальных законов.

Концепция взаимодействий, использованная выше для объединения теорий в единую систему, также неабсолютна, она ограничена указанными пространственными рамками, за пределами которых возникают принципиальные трудности и противоречия, свидетельствующие о незавершенности физического знания. И все же нет никаких сомнений в том, что современная физическая картина мира, выкристаллизовавшаяся в процессе развития физической теории как грандиозное обобщение, является крупным шагом вперед на пути познания природы.

Далее в курсе мы переходим к подробному количественному описанию частей этой картины в рамках отдельных фундаментальных физических теорий.

## ЧАСТЬ I. КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

### Введение

Классическая механика — наука о законах движения и равновесия макроскопических материальных тел. При этом под механическим движением понимается простейшая форма движения — изменение положения тел относительно друг друга.

Механическое движение широко распространено в окружающем мире и имеет для человека первостепенное, жизненно важное значение наряду с другими формами движения. Оно тесно связано с тепловым движением (движением входящих в состав тел атомов и молекул), с электромагнитным и гравитационным полями. В частности, поля могут служить причиной, определяющей особенности механического движения, а механическое движение заряженных частиц — порождать поля.

О механическом движении говорят как о наиболее простом из всех видов движения материи. Однако простота механического движения означает лишь простоту описывающей его модели, отражающей интересующие нас стороны движения с достаточной для практических нужд полнотой. Механическое движение теряет свою простоту, если рассматривать механические объекты и явления со всеми деталями. Так, например, движение любого тела определяется взаимодействием и движением всех составляющих его ядер и электронов, атомов и молекул, однако строение тел и взаимодействие составляющих их частиц в механике не учитывают, заменяя тела простыми моделями.

Основная исходная модель всех материальных объектов в механике — *материальная точка*. Она заменяет материальный объект (тело или его часть) с пренебрежимо малыми по условиям задачи размерами, но конечной массой. Тела и их части моделируются геометрической точкой, которая наделяется массой, проявляющейся при взаимодействиях. Существенное свойство материальной точки состоит в том, что мы можем определить ее положение в пространстве и скорость (импульс) в каждый момент времени. При этом материальная точка движется по гладкой кривой линии — траектории движения.

Для изучения материальными точками заменяются как макроскопические тела целиком (например, Земля при изучении ее движения в Солнечной системе), так и отдельные части твердых, жидких, газообразных тел. Важно отметить, что, говоря о материальной точке как об объекте бесконечно малых размеров, имеют в виду физически бесконечно малый объект, т. е. объект конечных, притом, может быть,

очень больших размеров по отношению к человеческому телу, но достаточно малый по сравнению с другими размерами в задаче.

Более того, если обратиться к элементарным частицам — материальным объектам очень малых размеров (например, электроны имеют радиус меньше $10^{-18}$ м, а возможно, что их радиус равен 0), то некоторые характеристики движения материальной точки — определенные значения координат и скоростей, определенная траектория движения — для них могут быть утрачены. В классической механике микрообъекты в таком случае не рассматриваются и материальными точками в классическом смысле не моделируются.

Заменяя несколько тел или частей одного тела материальными точками, приходят к *системе материальных точек.* Других самостоятельных моделей материальных объектов классическая механика не имеет. К системе сводятся твердые тела с неизменными расстояниями между точками, сплошные вещественные среды. Движение тел и систем тел сводится к движению составляющих их материальных точек.

В механике используется определенная модель пространства и времени, а также *система отсчета.* Тела, относительно которых рассматривается движение, заменяются системой отсчета, назначение которой состоит в том, чтобы иметь возможность различить положения движущейся материальной точки в пространстве в любой момент времени. С помощью жестких масштабов (для измерения длин и углов) и часов (для измерения времени) можно в каждый момент времени $t$ определить в некоторой системе отсчета положение материальной точки $\vec{r}$, т. е. кинематически описать ее движение, что выражается *кинематическим уравнением:* $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Следующий шаг описания механического движения — рассмотрение взаимодействия между материальными точками. Механика исходит из идеи *дальнодействия:* одна материальная точка действует в пространстве на другую, находящуюся от нее на расстоянии, и изменяет ее скорость без какого-либо посредника, заполняющего пространство между точками. Действие в пространстве передается мгновенно. Это действие характеризуется силой; сила вызывает *ускорение.*

Если сила задана, то ее источник во многих случаях может не рассматриваться (когда его движение нас не интересует). Так в механике возникает понятие *силового поля* — пространства, в каждой точке которого на материальную точку действует сила: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$.

Основная задача механики и заключается *в динамическом описании движения материальной точки,* устанавливающем связь между силовым полем, в котором движется материальная точка, и кинематическим уравнением ее движения. Эта связь отражена в дифференциальном уравнении: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$.

Почти все содержание классической механики, как будет видно из настоящего курса, связано с решением этого уравнения.

В механике можно выделить *кинематику*, где рассматриваются различные виды кинематического уравнения в различных системах координат, *динамику*, где решается динамическое уравнение для одной материальной точки, системы точек, твердого тела, *статику*, где разбираются случаи равновесия систем, т. е. движения (покоя) при отсутствии ускорений.

Так как все формы движения материи связаны с механическим движением, то механика оказывается в какой-то мере основой всей физики, лежит в ее фундаменте. Не случайно и исторически эта теория сложилась первой среди других физических теорий. Зародившись в древности, механика получила свое название в трудах Аристотеля (384—322 гг. до н. э.). Архимед (287—212 гг. до н. э.) дал теорию рычага. Галилей (1564—1642) считается основоположником динамики, ибо он установил ряд свойств равноускоренного движения, пришел к выводу о движении тел по инерции, о силе как причине ускорения. С его же именем связывают обращение к эксперименту в механике как методу установления объективно существующей в природе закономерности. Предшествовавший Галилею античный период характерен в науке дедуктивными рассуждениями, опирающимися не на опыт и не всегда на верные предпосылки.

Но основы современной механики заложил И. Ньютон (1643—1727), дав в вышедшей в 1687 г. книге «Математические начала натуральной философии» полную и строгую систему законов механики. Ньютон определяет механику как «учение о движениях, производимых какими бы то ни было силами, и о силах, требуемых для производства каких бы то ни было движений». Смысл этого определения не утрачен до сих пор и отражается в прямой и обратной задачах механики. Создав принципы механики, Ньютон разрешил и большое число ее конкретных задач, в частности задачу о движении планет в поле силы тяжести Солнца.

Далее существенный этап развития расчетных математических методов в механике связан с именем Даламбера (1717—1783), предложившего простой и общий метод составления уравнения движения системы. Широкое обобщение аналитические методы получили в трудах Лагранжа (1736—1783), выдвинувшего принцип виртуальных перемещений. Расширение принципа виртуальных перемещений мы находим в трудах русского математика М. В. Остроградского (1801—1861). Вклад в динамику твердого тела внес С. А. Чаплыгин (1869—1947), а в аэродинамику — Н. Е. Жуковский (1847—1921), который был также выдающимся педагогом, ратовавшим за ясное и четкое выделение физической сущности механических задач и их решение.

Основные результаты, составляющие теоретическую основу космонавтики в механике точки с переменной массой, получены И. В. Мещерским (1859—1935) и К. Э. Циолковским (1857—1935).

Классическая механика в настоящее время является вполне сложившейся фундаментальной теорией с четкой системой исходных положений, мощным и универсальным математическим аппаратом, с огромным богатством решений конкретных задач. Она развивается

и в наши дни. В частности, с помощью электронно-счетной техники успешно решаются разнообразные задачи, связанные с движением космических кораблей, задачи на расчет прочности конструкций и т. д.

Выше уже говорилось о роли механики как фундамента физики. Существенна ее связь с прикладными и техническими знаниями. Она является одной из научных основ многих областей современной техники. Можно назвать целый ряд дисциплин, базирующихся на механике: гидравлика, сопротивление материалов, кинематика и динамика машин и механизмов, строительная механика, баллистика, теория движения транспортных средств и т. д.

Наш курс посвящен фундаментальной части механики — динамике, ее основным положениям и законам. Для учителя физики средней школы особенно важна ее познавательная, эвристическая сторона, благодаря которой возможно проникновение с помощью механических законов и методов в сущность явлений, окружающих человека в природе и технике. Важно также значение ряда понятий и законов механики для других разделов физики. Эти обстоятельства в значительной мере определяют содержание и характер изложения материала в курсе.

Механика уже изучалась в курсе общей физики. В курсе теоретической физики изучение механики продолжается, т. е. решаются дополнительные задачи с использованием более последовательных математических методов, углубляется содержание понятий и законов, рассматриваются наряду с законами Ньютона другие общие уравнения и методы механики — уравнения Даламбера, Лагранжа, Гамильтона.

Классическая механика, как и другие фундаментальные физические теории, имеет хотя и широкую, но ограниченную определенными рамками область применимости. Уже говорилось, что это теория движения макроскопических тел: для отдельных микрочастиц ее законы часто утрачивают силу. Кроме этого, классическая механика — теория движения тел с небольшими скоростями по сравнению со скоростью света. В области микрочастиц классическая механика уступает место квантовой, а в области высоких скоростей — релятивистской теории.

## ГЛАВА I. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

Кинематика является вводным разделом механики, в котором математическими средствами описывается движение материальной точки или тела в пространстве. Основная задача кинематики состоит в том, чтобы задать или определить положение движущейся точки относительно некоторой системы отсчета в каждый момент времени. Важно отметить, что в кинематике выясняется лишь характер движения тел: их траектории, скорости, ускорения, зависимость координат точки или тела от времени, а причины движения — действующие на тела силы и их связи с кинематическими параметрами — не обсуждаются.

## § 1. Описание движения материальной точки

**1.1. Система отсчета. Пространство и время в классической механике.** Под движением материальной точки в пространстве понимают изменение ее положения относительно некоторых тел с течением времени. В связи с этим можно говорить только о движении в некоторой *системе отсчета.* Система отсчета — это совокупность тела или неподвижных относительно друг друга тел отсчета и набора измерительных инструментов, позволяющих определять расстояния по прямой линии, углы, моменты и промежутки времени. Кратко об этом наборе говорят как о пространственных масштабах и часах.

Сами по себе точки пустого пространства неразличимы между собой, поэтому говорить о той или иной точке пространства можно, если в ней находится материальная точка. Ее положение и определяется относительно тела отсчета с помощью измерений, для чего с телом (телами) отсчета жестко связывается некоторая система координат; в ней и измеряются пространственные координаты. Например, на поверхности Земли это географическая широта и долгота точки, в аудитории — три расстояния от точки до пола и двух стен, образующих прямой двугранный угол, и т. д.

В теоретических рассуждениях часто наиболее удобна декартова прямоугольная система координат, в которой положение точки определяется радиус-вектором $\vec{r}$ с тремя проекциями $x$, $y$, $z$ — координатами точки. Но возможно использование и других систем координат, например сферической, где положение точки или ее радиус-вектор определены координатами $r$, $\vartheta$, $\varphi$; цилиндрической: $\rho$, $z$, $\alpha$; на плоскости — полярной: $r$, $\varphi$. В теоретических рассуждениях часто не принимают во внимание реальную систему отсчета, сохраняя только систему координат, которая и служит математической моделью системы отсчета, применяемой при измерениях на практике.

Определение всех возможных положений материальной точки в пространстве в любой системе отсчета приводит к множеству троек действительных чисел, обозначающих множество геометрических точек. Это множество составляет геометрическое пространство. Оно *трехмерно* (точки имеют три координаты), *непрерывно* (между двумя как угодно близкими точками найдется бесконечно много других точек, т. е. возможны самые малые расстояния между точками пространства), обладает топологическим свойством односвязности.

В системах отсчета, называемых инерциальными, пространство однородно — все точки равноправны — и изотропно — равноправны все направления — евклидово (справедлива геометрия Евклида).

Все перечисленные свойства пространства не являются априорными, а вытекают из опыта и практики и ими подтверждаются. Все они используются в физике. Так, в ней применяются геометрические теоремы, формулы геометрии, тригонометрии. Непрерывность пространства позволяет рассматривать бесконечно малые расстояния, площади, объемы, соответственно применяя средства дифференциального и интегрального исчисления и т. д.

При построении теории исходные обобщения данных эксперимента и практики выражаются в аксиомах или постулатах. В соответствии с этим перечисленные свойства геометрического пространства в классической механике *постулируются.* Надо

подчеркнуть, что данные свойства оказываются универсальными для всех изучаемых в нашем курсе теорий, т. е. геометрическая модель пространства остается справедливой и применяется в электродинамике, квантовой механике, статистике, электронной теории и физике ядра.

Для изучения движения материальной точки необходимо определять моменты времени, в которые материальная точка имеет те или иные пространственные координаты. Но для этого нужно располагать часами в каждой точке пространства (например, множеством часов на определенных расстояниях друг от друга при движении поезда, т. е. на каждой железнодорожной станции). По часам фиксируется момент времени $t$, в который материальная точка имеет координаты $x$, $y$, $z$. *Попадание материальной точки в точку пространства с координатами $x$, $y$, $z$ в момент времени $t$ называется элементарным механическим событием.*

Подчеркнем, что элементарное механическое событие, имеющее место в некоторой системе отсчета, обязательно наблюдается и во всех других возможных системах отсчета. В этом смысле говорят об его *инвариантности* по отношению к системам отсчета. Что же касается координат события и момента времени, то эти четыре числа могут быть различными в различных системах отсчета и системах координат.

*Непрерывная совокупность последовательных событий и составляет механическое движение.* Но чтобы такая совокупность имела смысл, необходима синхронизация всех часов в данной системе отсчета. На практике синхронизация производится с помощью сигналов точного времени. В принципе синхронизация сводится к установке всех часов системы на нуль по сигналу, испускаемому из начала в нулевой момент времени по часам, установленным в начале координат.

В классической механике предполагается, что синхронизирующий сигнал распространяется с бесконечной скоростью. Но в природе самый быстрый сигнал имеет скорость $c = 3 \cdot 10^8$ м/с (скорость света). В связи с этим оказывается, что классическая механика применима в той области движения, где запаздыванием синхронизирующего сигнала по сравнению с рассматриваемыми временами движения тел можно пренебречь, т. е. по сравнению с изучаемыми в механике скоростями тел можно принять $c = \infty$, а последнее возможно, если $v << c$.

С помощью синхронизации устанавливается единое время в системе отсчета. Множество моментов времени считается *непрерывным*, *одномерным*, *однородным*. Этот вывод сделан на основе всей практической деятельности людей. Непрерывность времени состоит в существовании как угодно малых его промежутков. Однородность времени означает равноправие всех его моментов, что позволяет произвольно выбирать начало отсчета времени в любой системе.

Одномерность времени состоит в том, что его точки — моменты определяются одним числом, т. е. множеству точек времени можно сопоставить числовую ось, тогда как физическому пространству — трехмерное геометрическое пространство. Опыт показывает, что вре-

мя *однонаправленно*, т. е. возвратиться к прошлому моменту времени в известных нам системах отсчета физически невозможно. Однонаправленность времени означает также, что при любом выборе начала отсчета часы в любой системе отсчета дают монотонно увеличивающиеся показания.

Свойства времени и возможность синхронизации часов сигналами, мгновенно покрывающими расстояния (с бесконечно большой скоростью), в классической механике постулируются.

Перечисленные свойства времени также универсальны для всех фундаментальных физических теорий, как и свойства пространства. Бесконечная же скорость синхронизирующего сигнала есть очевидное приближение. От него приходится отказаться при изучении тех разделов физики, где имеют дело с высокими скоростями движения физических объектов: в электродинамике, СТО, ядерной физике и т. д.

Итак, в любой системе отсчета и системе координат имеется возможность определить координаты материальной точки в любой момент времени.

**1.2. Кинематические уравнения движения материальной точки.** Если положение материальной точки в каждый момент времени определено в данной системе отсчета, то движение ее задано или описано. Это задание достигается в виде кинематического уравнения движения:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \qquad (1.1)$$

Аналитически положение точки всегда определяется совокупностью трех независимых между собой чисел. Этот факт выражают словами: *свободная точка имеет три степени свободы движения*[1].

Движение точки согласно уравнению (1.1) полностью определено, если указано ее положение в любой момент времени $t$. Для этой цели достаточно задать декартовы координаты точки как однозначные и непрерывные функции времени:

$$x = x(t), \ y = y(t), \ z = z(t). \qquad (1.2)$$

Прямоугольные декартовы координаты $x$, $y$, $z$ являются проекциями радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного в точку из начала координат, т. е. $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Длина и направление вектора $\vec{r}$ находятся из известных соотношений: $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$,

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \ \cos\beta = \frac{y}{r}, \ \cos\gamma = \frac{z}{r}.$$

Здесь $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — углы, образованные радиус-вектором с координатными осями.

Равенства (1.2) являются *кинематическими уравнениями* движения материальной точки в декартовых координатах. Но уравнения могут быть записаны в любой другой системе координат, связанной с декартовой взаимно однозначным преобразованием. При движении точки в плоскости $Oxy$ часто бывает удобно пользоваться полярными

[1] Свободная точка та, движение которой не ограничено в пространстве телами конечных размеров — поверхностями, линиями и т. д.

координатами $r$ и $\varphi$, связанными с декартовыми преобразованием: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. В этом случае кинематические уравнения движения точки имеют следующий общий вид:

$$r = r(t),\ \varphi = \varphi(t). \tag{1.3}$$

В криволинейных координатах $q_1$, $q_2$, $q_3$, связанных с декартовыми преобразованием:

$$x = x(q_1q_2q_3),\ y = y(q_1q_2q_3),\ z = z(q_1q_2q_3), \tag{1.4}$$

кинематические уравнения движения точки запишутся так:

$$q_1 = q_1(t),\ q_2 = q_2(t),\ q_3 = q_3(t). \tag{1.5}$$

(Это могут быть сферические, цилиндрические и другие координаты.)

*Годограф радиус-вектора точки*, т. е. кривая, описываемая концом вектора $\vec{r}$ при движении точки, *совпадает с траекторией движения этой точки*. Уравнение траектории в параметрической форме, когда параметром служит время $t$, дано кинематическими уравнениями движения (1.2), (1.5). Для получения уравнения траектории в координатной форме достаточно исключить из кинематических уравнений время.

Движение точки может быть определено по-другому: заданием траектории и мгновенным положением точки на ней. Положение точки на кривой определяется указанием только одной величины — расстояния, измеряемого вдоль кривой от некоторой начальной точки. При этом должно быть указано положительное направление кривой. Тогда мгновенное положение точки на заданной кривой определяется функцией

$$s = s(t). \tag{1.6}$$

Это уравнение является уравнением движения точки по траектории. Такой способ задания движения называется *естественным* или траекториым.

Координатный и естественный способы задания движения точки физически (в смысле фиксации ее положения в пространстве) эквивалентны. Что же касается математической стороны дела, то в одних задачах оказывается проще применение координатного, а в другом — естественного метода.

Закон движения точки по траектории может быть задан *аналитически* (1.6), *графически* или в виде *таблицы*. Оба последних способа широко применяются на транспорте (например, графики и расписания движения поездов).

Пример 1.1. **Переход от координатного к естественному методу описания движения.**

Пусть движение материальной точки задано уравнениями

$$x = R\cos\omega t,\ y = R\sin\omega t.$$

Исключая время, имеем: $x^2 + y^2 = R^2$
— материальная точка движется по окружности радиуса $r$ с центром в начале координат декартовой системы $Oxy$.

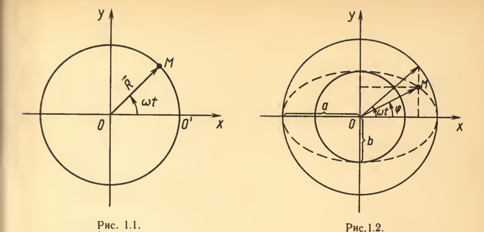



Рис. 1.1.

Рис.1.2.

Из рисуика 1.1. видио, что радиус-вектор точки поворачивается из иачальиого положеиия по оси $Ox$ против часовой стрелки, так что угол поворота в момеит времеии $t$ составляет $\omega t$. Если точку $O'$ выбрать за начало отсчета дуг, определяющих положение материальиой точки иа траектории, то киематический закон движеиия в естествеииой форме имеет вид: $s = \omega R t$.

Пример 1.2. **Переход от декартовой системы к поляриой.**

Для киематических уравиеиий предыдущей задачи имеем: $r = \dfrac{x}{\cos\varphi}$, $r = \dfrac{y}{\sin\varphi}$. Если $\varphi = \omega t$, то $r = R = \text{const}$ и уравиеиия движеиия материальиой точки по окружиости в полярных координатах будут: $r = R$, $\varphi = \omega t$.

Пример 1.3. **Другой пример перехода от декартовой системы к поляриой.**

Пусть движеиие задаио уравнеииями

$$x = a\cos\omega t,\ y = b\sin\omega t.$$

Исключая время, получаем уравиеиие эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Из рисуика 1.2. видно, что

$$r = \sqrt{a^2\cos^2\omega t + b^2\sin\omega t}\ ,\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}\operatorname{tg}\omega t\,,$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}(\frac{b}{a}\operatorname{tg}\omega t).$$

Из примера видно, что в данном случае в декартовых координатах уравнение движения выглядит значительно проще, нежели в полярных.

**1.3. Скорость движения точки.** *Скоростью называется производная радиус-вектора точки по времени движения точки:*

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}\,. \tag{1.7}$$

Из определения следует, что скорость есть вектор, направленный по касательной к траектории в сторону движения точки.

Как всякий вектор, скорость можно разложить на составляющие по осям декартовой системы координат:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}.$$

Дифференцируя радиус-вектор точки по времени и замечая, что координатные векторы (орты) — постоянные величины, имеем:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}.$$

Сравнение полученного результата с разложением вектора скорости по ортам приводит к выражениям проекций скорости в декартовых координатах:

$$v_x = \frac{dx}{dt},\ v_y = \frac{dy}{dt},\ v_z = \frac{dz}{dt}.$$

По этим формулам вычисляется скорость, когда движение точки задано уравнениями (1.2). Величина и направление скорости определяются через известные проекции по обычным формулам:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2,$$

$$\cos\alpha = \frac{\dot{x}}{v},\ \cos\beta = \frac{\dot{y}}{v},\ \cos\gamma = \frac{\dot{z}}{v}.$$

Кратко остановимся на физическом смысле разложения вектора скорости на составляющие. Из математики известно, что операция разложения любого вектора по трем некомпланарным всегда возможна и связана с аксиомами, определяющими вектор. С точки зрения физики сложение и разложение векторов отражает некоторые представления одного физического объекта другими. Так, разложение скорости означает замену одного элементарного перемещения материальной точки $d\vec{r} = \vec{v}dt$ совокупностью трех перемещений $dx = v_xdt$, $dy = v_ydt$, $dz = v_zdt$, совершаемых в любой последовательности.

Далее, в § 3, мы познакомимся с другой, физически более содержательной трактовкой сложения и разложения векторов скорости — представлением движения в неподвижной системе отсчета как одновременного движения другой системы и точки в ней.

Перейдем от декартовых к полярным координатам. Для нахождения проекций скорости в полярных координатах, необходимых для вычисления скорости, когда движение задано уравнениями (1.3), найдем предварительно формулы преобразования проекций произвольного вектора $\vec{b}$ при переходе от декартовых координат к полярным. В полярных координатах вектор проектируется на направление радиус-вектора, проведенного в данную точку, и направление, перпендикулярное радиус-вектору, в сторону возрастания полярного угла $\varphi$.

Проекцию на первое направление будем обозначать индексом $r$, на второе $\varphi$. Общий вид разложения по ортам полярной системы следующий: $\vec{b} = b_r\vec{r}_0 + b_\varphi\vec{\rho}_0$. Здесь $\vec{r}_0$ — единичный вектор, совпадающий по направлению с радиус-вектором точки; $\vec{\rho}_0$ — перпендикулярный ему единичный вектор, направленный в сторону возрастания угла $\varphi$.

Спроецируем предыдущее векторное уравнение на ось $Ox$ и получим равенство

$$b_x = b_r \cos \varphi - b_\varphi \sin \varphi, \tag{1.8}$$

выражающее проекцию вектора на ось $Ox$ через его проекции в полярных координатах. Им и воспользуемся для нахождения проекции скорости в полярных координатах. Для этой цели дифференцируем по времени формулу преобразования координаты $x$:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(r \cos \varphi) = \frac{dr}{dt} \cos \varphi - r \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi.$$

Сравнивая полученный результат с (1.7), находим выражения искомых проекций скорости:

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r}, \; v_\varphi = r \frac{d\varphi}{dt} = r\dot{\varphi}.$$

Ввиду ортогональности полярных координат модуль скорости и ее направление находятся по формулам

$$v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2, \; \cos \alpha = \frac{v_r}{v}, \; \cos \beta = \frac{v_\varphi}{v}. \tag{1.9}$$

При естественном способе задания движений проекция скорости на положительное направление касательной к траектории (*алгебраическая величина скорости*) находится дифференцированием уравнения движения по времени:

$$v = \frac{ds}{dt}. \tag{1.10}$$

В зависимости от способа задаиия двнжеиия нли системы коордниат формулы для вычисления проекций скорости оказались разиыми. Для обобщеиия способа вычислеиия скорости найдем формулы для проекцнй скорости в обобщеиных криволниейных координатах $q_1$, $q_2$, $q_3$, являющихся ортогоиальными. Формулы перехода от декартовых коордииат к крнволинейным нмеют вид: $x = x(q_1 q_2 q_3)$, $y = y(q_1 q_2 q_3)$, $z = z(q_1 q_2 q_3)$. Дифференцируя их по времеии, получаем выражения для проекций скорости в декартовых коордииатах:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial x}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3}\dot{q}_3, \\ \dot{y} &= \frac{\partial y}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3}\dot{q}_3, \\ \dot{z} &= \frac{\partial z}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3}\dot{q}_3. \end{aligned} \right. \tag{a}$$

Производные обобщеиных координат по времени

$$\dot{q}_1 = \frac{dq_1}{dt}, \; \dot{q}_2 = \frac{dq_2}{dt}, \; \dot{q}_3 = \frac{dq_3}{dt}$$

иазываются обобщеныымн скоростямн. Действительио, в завнсимостн от размерности обобщеииой координаты $q$ ее производная по времеии может иметь смысл линейиой скорости, угловой скорости и пр.

Найдеииые формулы (а) показывают, что проекцни скоростн точки в декартовых коордииатах являются лннейиыми однородиыми фуикциями обобщеиных скоростей, коэффнциенты $\frac{\partial x}{\partial q_1}$, $\frac{\partial y}{\partial q_2}$ и др. при которых есть в общем случае фуикции обобщенных коордииат.

Обозначая через $v_1$, $v_2$, $v_3$ проекции скорости на оси криволинейных координат (на касательные к координатным линиям в сторону возрастания координат $q$) и учитывая их ортогональность, для квадрата модуля скорости должны иметь выражение $v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$. Возводя в квадрат векторное разложение скорости с учетом формул (а) и суммируя полученные результаты, получим:

$$v^2 = H_1^2 \dot{q}_1^2 + H_2^2 \dot{q}_2^2 + H_3^2 \dot{q}_3^2. \tag{1.11}$$

Члены с произведениями $q_1 q_2$, $q_1 q_3$, $q_2 q_3$ в силу ортогональности системы координат в скалярном произведении должны отсутствовать. Здесь через $H_1$, $H_2$, $H_3$ обозначены следующие выражения, являющиеся функциями обобщенных координат:

$$\begin{cases} H_1 = \sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}, \\ H_2 = \sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2}, \\ H_3 = \sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2}. \end{cases} \tag{1.12}$$

Эти величины называются коэффициентами Ламэ. Искомые проекции скорости в криволинейных координатах будут иметь вид:

$$v_1 = H_1 \dot{q}_1, \; v_2 = H_2 \dot{q}_2, \; v_3 = H_3 \dot{q}_3.$$

Рассмотрим также понятие секторной скорости. На рисунке 1.3 изображены траектория движущейся точки и ее радиус-вектор. За элемент времени $dt$ радиус-вектор опишет элементарную площадку — элементарный сектор $d\vec{S}$. По договоренности вектор элементарной площадки имеет модуль, равный ее площади, а направлен по нормали к площадке в сторону, образующую с направлением обхода контура площадки правовинтовую систему.

Вектор

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{S}}{dt} \tag{1.13}$$

называют *секторной* скоростью точки. С точностью до бесконечно малых второго порядка площадь элементарного сектора совпадает с площадью треугольника, образованного векторами $\vec{r}(t)$, $d\vec{r}$ и $\vec{r}(t + dt)$. Легко проверить, что вектор элементарной площадки треугольника есть $d\vec{S} = \frac{1}{2}[\vec{r}d\vec{r}]$; направление обхода контура элементарного сектора определяется направлением движения точки или направлением обхода в порядке векторов-сомножителей, если смотреть от конца вектора-произведения. Для вектора секторной скорости получаем формулу

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2}\left[\vec{r}\,\frac{d\vec{r}}{dt}\right] = \frac{1}{2}[\vec{r}\,\vec{v}]. \tag{1.14}$$

Когда траекторией движения служит плоская кривая, секторная скорость всегда направлена по нормали к плоскости движения. Про-

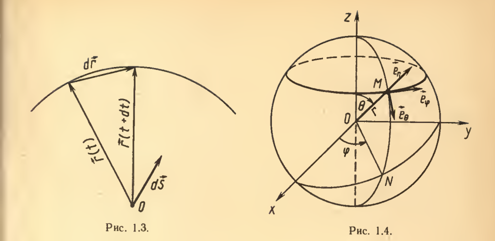



Рис. 1.3. Рис. 1.4.

екцию ее на нормаль в этом случае удобно вычислять в полярных координатах (полюсом служит точка $O$). Элементарный сектор с точностью до бесконечно малых второго порядка можно считать круговым и его площадь равной $dS = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$. Отсюда для проекции секторной скорости на нормаль получаем выражение $\sigma_n = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}$, а для модуля имеем: $\sigma = \frac{1}{2} r^2 |\dot{\varphi}|$. (1.15)

Пример 1.4. **Вычисление скорости в сферических координатах.**

В сферических координатах (рис. 1.4) кинематические уравнения движения имеют вид: $r = r(t)$, $\vartheta = \vartheta(t)$, $\varphi = \varphi(t)$.

Известна связь между сферическими и декартовыми координатами:

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi, \quad z = r \cos\vartheta.$$

Обобщенными скоростями в этой системе являются $\dot{q}_1 = \dot{r}$, $\dot{q}_2 = \dot{\vartheta}$, $\dot{q}_3 = \dot{\varphi}$. Для нахождения проекций скоростей на координатные линии $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\vartheta$, $\vec{e}_\varphi$ надо вычислить коэффициенты Ламэ (1.12):

$$H_1 = \sqrt{\sin^2\vartheta \cos^2\varphi + \sin^2\vartheta \sin^2\varphi + \cos^2\vartheta} = 1,$$

$$H_2 = \sqrt{r^2 \cos^2\vartheta \cos\varphi + r^2 \cos^2\vartheta \sin^2\varphi + r^2 \sin^2\vartheta} = r,$$

$$H_3 = \sqrt{r^2 \sin^2\vartheta \sin^2\varphi + r^2 \sin^2\vartheta \cos^2\varphi} = r \sin\vartheta.$$

Следовательно, по формулам (1.11)

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta + r \sin\vartheta \cdot \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi,$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta \cdot \dot{\varphi}^2).$$

Пример 1.5. **Расчет скорости в цилиндрических координатах.**

Кинематические уравнения имеют вид (рис. 1.5): $\rho = \rho(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $z = z(t)$. Аналогичный предыдущему расчет дает: $\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_r + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z$; $v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2$.

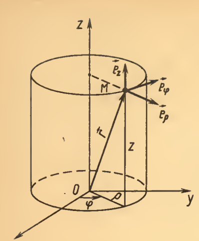


Рис. 1.5.

Пример 1.6. **Расчет секториой скорости в декартовых координатах.**

Пользуясь формулой (1.14) и формулами проекций скорости в декартовых координатах, записываем:

$$\sigma_x = \frac{1}{2}(y\dot{z} - z\dot{y}),\ \sigma_y = \frac{1}{2}(z\dot{x} - x\dot{z}),$$

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

Если $\vec{r}$ и $\vec{v}$ лежат в плоскости $xOy$, то секториая скорость направлена по оси $Oz$ и имеется едииствеииая, отличиая от иуля ее проекция:

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

**1.4. Ускореиие движеиия точки.** *Ускорение движения материальной точки есть производная вектора скорости по времени:*

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}. \tag{1.16}$$

Вектор ускорения направлен по касательной годографа вектора скорости. Из (1.16) следует, что *вектор ускорения является второй производной радиус-вектора точки по времени:*

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}. \tag{1.17}$$

Проекции ускорения в декартовых прямоугольных координатах выражаются наиболее просто. Разлагая вектор скорости по ортам, имеем:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}.$$

Дифференцируя это равенство по времени, находим:

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}.$$

В правой части этого равенства имеем разложение ускорения по ортам, т. е. проекции ускорения в декартовых координатах выражаются формулами

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \ddot{x},\quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \ddot{y},\quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \ddot{z}.$$

Для нахождения проекций ускорения в полярных координатах на плоскости дважды дифференцируем по времени формулу преобразования координаты $x = r\cos\varphi$. Получаем: $a_x = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\cos\varphi -$ $- (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\sin\varphi$. На основании общего закона преобразования

проекций вектора на ось при переходе к полярным координатам (1.8) сразу получаем искомые проекции ускорения в этих координатах:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = 2\,\dot{r}\,\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}. \qquad (1.18)$$

Модуль и направление вектора ускорения $\vec{a}$ через его проекции в ортогональной системе координат вычисляются по стандартным формулам, приведенным в предыдущем параграфе.

При естественном способе задания движения необходимо знать проекции ускорения на оси естественного трехгранника: на положительное направление касательной к траектории, по которому направим единичный вектор $\vec{\tau}$, на главную нормаль $\vec{n}$ и бинормаль $\vec{b}$ (рис. 1.6). Из определения ускорения (1.17) следует, что вектор ускорения всегда лежит в соприкасающейся плоскости траектории и поэтому проекция ускорения на бинормаль равна нулю (вектор $d\vec{v}$ есть сторона треугольника; двумя другими сторонами являются касательные в смежных точках траектории). Разложение вектора ускорения по осям естественного трехгранника по указанной причине имеет следующий вид: $\vec{a} = a_\tau\vec{\tau} + a_n\vec{n}$.

Проекция $a_\tau$ называется *тангенциальным* ускорением, а проекция $a_n$ — *нормальным* ускорением. Разложение скорости по тем же направлениям дает: $\vec{v} = v\vec{\tau}$.

Здесь $v$ называют *алгебраической* величиной скорости; это проекция вектора скорости на касательную к траектории. Дифференцируем последнее равенство по времени: $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}$. Годографом единичного вектора является окружность в соприкасающейся плоскости. Производная $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ направлена по главной нормали. Численная величина производной $\left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right|$, как легко установить из рисунка 1.7, равна $\frac{d\vartheta}{dt}$, где $d\vartheta$ — угол между касательными к траек-

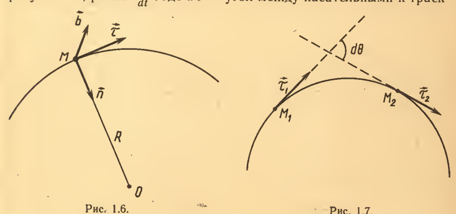



Рис. 1.6. Рис. 1.7.

тории в смежных точках. Поэтому имеем:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt}\vec{n} = \frac{d\vartheta}{ds}\frac{ds}{dt}\vec{n} = v\frac{d\vartheta}{ds}\vec{n}.$$

Отношение $\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{1}{\rho}$ определяет кривизну в данной точке, так как $\rho$ — радиус кривизны. Получаем окончательный результат:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}. \qquad (1.19)$$

Сравнивая (1.19) с общим видом разложения ускорения по осям естественного трехгранника, получаем формулы для тангенциального и нормального ускорений:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}. \qquad (1.20)$$

Пример 1.7. **Проекции ускорения в сферических координатах.**

Дадим их без вычислений:

$$a_r = \ddot{r} - r(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta),$$
$$a_\vartheta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\vartheta}) - r\dot{\varphi}^2 \sin\vartheta\cos\vartheta,$$
$$a_\varphi = \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}\sin^2\vartheta).$$

Обоснование формул будет дано в гл. VI.

Пример 1.8. **Проекции ускорения в цилиндрических координатах.**

$$a_r = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2,$$
$$a_\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}),$$
$$a_z = \ddot{z}.$$

Пример 1.9. **Нахождение скорости и ускорения материальной точки по заданным кинематическим уравнениям.**

$$x = R\cos\omega t,$$
$$y = R\sin\omega t.$$

Дифференцируя эти равенства по времени, имеем:

$$v_x = -R\omega\sin\omega t,\ v_y = R\omega\cos\omega t,\ v = R\omega;$$
$$a_x = -R\omega^2\cos\omega t,\ a_y = -R\omega^2\sin\omega t,\ a = R\omega^2.$$

Из сравнения проекций ускорения с проекциями радиус-вектора точки замечаем, что в данном движении

$$\vec{a} = -\omega^2\vec{R}.$$

Применяя естественный метод описания движения и дифференцируя закон движения точки по траектории $s = \omega Rt$, находим: $v = \omega R$ (см. пример 1.1).

По формулам (1.20) следует, что

$$a_\tau = 0,\ a_n = \frac{\omega^2R^2}{R} = \omega^2R.$$

Пример 1.10. **Расчет секторной скорости.**

Движение задано уравнениями $x = a \cos \omega t$, $y = b \sin \omega t$ и является неравномерным движением точки по эллипсу с центром в начале координат (см. рис. 1.2). В декартовых координатах скорость найдется дифференцированием этих равенств по времени:

$$v_x = -a\omega \sin \omega t,$$
$$v_y = b\omega \cos \omega t,$$
$$v^2 = a^2\omega^2 \sin^2 \omega t + b^2\omega^2 \cos^2 \omega t,$$

а ускорение

$$a_x = -a\omega^2 \cos \omega t, \; a_y = -b\omega^2 \sin \omega t,$$

т. е.

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r};$$

ускорение пропорционально удалению материальной точки от центра эллипса и направлено к центру.

Найдем еще секторную скорость точки в данном движении (см. пример 1.6):

$$\sigma = \frac{1}{2}\,(x\dot{y} - y\dot{x}) = (a \cos \omega t b\omega \cos \omega t + b \sin \omega t\, a\omega \sin \omega t) = ab\omega.$$

Таким образом, секторная скорость постоянна. Так как циклическая частота $\omega = \frac{2\pi}{T}$, то

$$\sigma = \frac{2\pi ab}{T}$$

и есть скорость описания радиус-вектором площади эллипса.

Пример 1.11. **Движение точки по эллипсу.**

Рассмотрим пример движения материальной точки, моделирующий движение планет в Солнечной системе.

Пусть точка движения по эллипсу с постоянной секторной скоростью и начало координат помещено в одном из фокусов эллипса. Скорость и ускорение будем искать в полярных координатах, в которых и зададим уравнение эллипса:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi},$$

где $p$ — параметр, а $e$ — эксцентриситет эллипса. Постоянство секторной скорости (1.15) выражаем соотношением

$$\sigma = \frac{1}{2}\, r^2\dot{\varphi} = \frac{C}{2},$$

или

$$r^2\dot{\varphi} = C.$$

Выразим скорость движения точки по эллипсу по (1.10): $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$.

Так как кинематические уравнения движения не заданы, перейдем в последнем выражении от дифференцирования по времени к дифференцированию по полярному углу $\varphi$:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\,\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\,\frac{C}{r^2},$$

$$v^2 = C^2 \left[ \frac{1}{r^4} \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right].$$

Удобно ввести новую переменную $x = \frac{1}{r}$, и тогда $v^2 = C^2 \left[ \left( \frac{dx}{d\varphi} \right)^2 + x^2 \right]$, а $x = \frac{1 + e \cos \varphi}{p}$, т. е. $v$ выражена как функция полярного угла.

Рассчитаем ускорение. По (1.18) имеем:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2,$$

$$a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi},$$

а дифференцируя по времени постоянную секторную скорость, находим:

$$2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi} = 0, \quad r(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = 0,$$

т. е.

$$a_\varphi = 0, \quad a = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2.$$

Аналогично расчету скорости получаем: $a = -C^2x^2\left(\frac{d^2x}{d\varphi^2} + x\right)$.

Подставляя сюда значение $x$, имеем:

$$a = -\frac{mC^2x^2}{p} = -\frac{mC^2}{p}\frac{1}{r^2}.$$

Ускорение в этом движении направлено к фокусу эллипса и обратно пропорционально квадрату расстояния до него.

## § 2. Кинематика движения твердого тела

**2.1. Координаты твердого тела. Кинематические уравнения движения.** *Под твердым телом в механике понимается непрерывная система материальных точек, расстояния между которыми остаются неизменными.* Аналитическое описание положения твердого тела в пространстве, а также изменения этого положения со временем, т. е. движения тела, должно определять положение и движение любой точки тела. Хотя число точек твердого тела неограниченно, число степеней свободы благодаря жестким связям невелико.

Определим число степеней свободы *свободного*, т. е. имеющего возможность произвольно перемещаться, твердого тела. Проведем для этой цели простое рассуждение. Материальная точка имеет три степени свободы. Две точки имеют шесть независимых координат. Если наложить условие неизменности расстояния между точками, то координаты двух точек должны удовлетворять уравнению:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l_{1,2}^2.$$

Здесь $l_{1,2}$ — расстояние между точками. Это уравнение позволяет выразить одну из координат через остальные пять, которые остаются произвольными. Таким образом, для определения положения системы из двух точек достаточно знать только пять декартовых координат из шести.

Если имеем систему из трех точек, не лежащих на одной прямой, то можно написать три независимых уравнения, выражающие расстояния между точками через их координаты. Если эти расстояния постоянны, то из девяти декартовых координат трех точек только шесть будут независимы. Добавление четвертой точки к этой системе не увеличит число степеней свободы, потому что координаты ее должны удовлетворять трем независимым уравнениям связей, определяющим расстояния этой точки до первых трех.

Дальнейшее увеличение точек в рассматриваемой системе не меняет число независимых координат. Следовательно, *свободное твердое тело имеет шесть степеней свободы, т. е. для однозначного определения его положения в пространстве необходимо задать шесть независимых координат.*

Рассмотрим, как делается выбор этих шести независимых координат, определяющих положение твердого тела в пространстве. Прежде всего скрепим с телом систему координат. Пусть это будет декартова система $O'x'y'z'$. Положение любой точки твердого тела определяется здесь координатами $x'$, $y'$, $z'$. Заметим, что эти координаты при движении тела остаются постоянными. Поэтому для определения положения твердого тела достаточно знать положение движущейся вместе с телом (подвижной) системы координат $O'x'y'z'$ относительно неподвижной $Oxyz$. На рисунке 2.1. изображены подвижная и неподвижная системы координат, которые в дальнейшем будем называть: подвижная — штрихованная система координат, неподвижная — нештрихованная система координат. Далее решается вопрос об описании движения системы $O'x'y'z'$ в системе $Oxyz$. Полученные результаты нужны не только для изучения движения тела, но и для изучения так называемого относительного движения точки.

Чтобы задать мгновенное положение системы $O'x'y'z'$, надо знать начало координат точки $O'$, т. е. координаты $x_0$, $y_0$, $z_0$ и углы, которые образуют ее оси с осями неподвижной системы. Всего имеется девять направляющих углов. Однако независимых из них будет только три. Действительно, как известно из аналитической геометрии, направляющие косинусы прямой удовлетворяют условию $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Таких уравнений будет три, и, кроме того, можно написать еще три уравнения, выражающие условия перпендикулярности подвижных осей. Девять направляющих углов должны удовлетворять шести независимым между собой уравнениям. Для ориентировки подвижных осей в пространстве, таким образом, достаточно задать только *три угла.*

Итак, вместо девяти направляющих углов, на которые наложено шесть уравнений связей, целесообразно ввести три независимых угла. Выбор этих углов был указан Эйлером, они и носят его имя[1]. На рисунке 2.2 показан обычный способ определения углов Эйлера. Начала координат обеих систем совмещены, что всегда можно достигнуть параллельным переносом. Прямая $ON$, по которой пересекаются плоскости $xOy$ и $x'O'y'$ подвижной и неподвижной систем, называется *линией узлов.* Углы, обозначенные на рисунке через $\psi$, $\vartheta$ и $\varphi$, есть искомые углы Эйлера. Положительное направление отсчета углов показано стрелками.

Угол $\varphi$ носит название угла *прецессии,* он изменяется при повороте подвижной системы вокруг неподвижной оси $Oz$ как оси вращения (остальные два угла при этом не изменяются).

Угол $\psi$ называется углом *собственного вращения:* при вращении

[1] Сведения об ученых, упомянутых в тексте, см. в кн.: Храмов Ю. А. Физики.

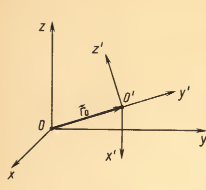


Рис. 2.1.

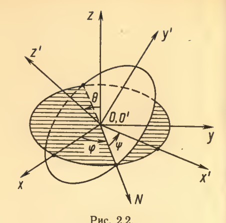



Рис. 2.2.

подвижной системы вокруг оси $O'z'$ как оси вращения изменяется только угол $\psi$.

Угол $\vartheta$ называется углом *нутации,* он изменяется (при постоянстве остальных двух углов), если вращается подвижная система вокруг линии узлов. (Наименования эйлеровых углов происходят от наименований простейших движений волчка, представляющего один из важнейших случаев применения механики к изучению твердого тела.)

*Шесть независимых величин: координаты начала подвижной системы $x_0$, $y_0$, $z_0$ и три эйлеровых угла $\psi$, $\vartheta$, $\varphi$ — в совокупности однозначно определяют положение подвижной системы координат относительно неподвижной, а значит, и положение твердого тела.* Аналитическое описание движения последнего состоит в задании шести однозначных и непрерывных функций времени:

$$x_0 = x_0(t),\ y_0 = y_0(t),\ z_0 = z_0(t);$$
$$\psi = \psi(t),\ \vartheta = \vartheta(t),\ \varphi = \varphi(t). \tag{2.1}$$

В силу независимости шести координат, характеризующих положение подвижной — штрихованной системы (тела), можно рассматривать частные движения, являющиеся составляющими общего движения. Если углы $\psi$, $\vartheta$, $\varphi$ остаются постоянными, то движение является *поступательным.* В этом случае любая ось штрихованной системы перемещается параллельно самой себе. Изменяются при поступательном движении только координаты точки $O'(x_0,\ y_0,\ z_0)$. Эта точка в дальнейшем будет называться *полюсом.*

Если координаты полюса постоянны, а изменяются во времени три эйлеровых угла, то *тело вращается относительно неподвижной точки.*

В общем случае, вводя поступательно движущуюся вспомогательную систему с центром в полюсе, представляем движение тела как поступательное движение этой системы и вращение штрихованной системы в ней.

Отдельные частные случаи движения тела приходится рассматри-

вать и тогда, когда свобода движения твердого тела соответствующим образом ограничена. В таком случае движение оказывается более простым. Основными частными случаямн движения твердого тела являются: поступательное движение, вращение вокруг неподвнжной оси н вращение вокруг неподвижной точки.

**2.2. Поступательиое движеиие.** Наиболее простым является поступательное двнжение. *При поступательном движении любая прямая, проведенная в теле, перемещается параллельно самой себе.* Эйлеровы углы при поступательном движенин твердого тела остаются постоянными, а изменяются только координаты начала подвнжной системы.

Говорят, что твердое тело имеет три поступательные степени свободы. Нетрудно вндеть, что прн поступательном движении перемещения всех точек одинаковы и совпадают с перемещениями полюса. Траектории всех точек тела при поступательном движении являются одннаковыми кривыми, параллельно смещенными относительно друг друга. Одинаковыми оказываются скоростн и ускорения всех точек тела. Поэтому поступательное движение твердого тела полностью определяется движением одной его точки, например полюса. Все изложенное выше о кинематике двнжения одной точки полностью относится н к поступательному двнжению твердого тела. Так, скорость находнтся по формуле

$$\vec{v}_0 = \dot{\vec{r}}_0(t),$$

ускорение

$$\vec{a}_0 = \ddot{\vec{r}}_0(t) \text{ н т. д.}$$

Подчеркнем, что траектории движения точек твердого тела при поступательном двнжении могут быть любымн кривыми линиями; поступательное движение нельзя отождествлять с прямолинейным движением. На рнсунке 2.3 изображена схема так называемого параллельного механнзма. Четыре стержня скреплены шарнирами. Стержень $AD$ неподвижен. Стержень $BC$ в плоскостн чертежа может совершать только поступательное движенне. Все точки его при этом описывают равные окружности.

**2.3. Мгновенная ось вращения. Угловая скорость.** Рассмотрнм теперь движение подвижной штрихованной системы (тела) относнтельно неподвижной — нештрихованной, в которой неподвижна одна точка тела — полюс. Мы говорим об этом движении, как о вращении тела вокруг неподвижной точки.

Начнем с геометрическнх представлений этого частного случая движения твердого тела. Прежде всего заметим, что все точки тела, лежащие на одном н том же радиусе, проведенном нз неподвижной точкн, опнсывают подобные траекторнн — кривые на поверхности сфер, ометаемых соответствующнм радиус-вектором при всевозможных движениях. Велнчнны скоростей точек пропорциональны расстояниям от них до неподвижной точкн. Эти заключения следуют из соотношеннй между векторами смещений точек тела, находящнхся на одном и том же радиусе (рнс. 2.4). Сфера с центром в неподвижной точке при пересечении с телом даст некоторую сферическую

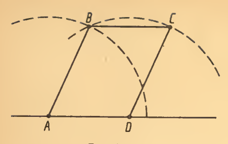



Рис. 2.3.

Рис. 2.4.

фигуру. При движеиии тела эта фигура перемещается по поверхиости сферы, часть которой оиа составляет. Положеиие сферической фигуры иа сфере одиозначно определяет положеиие тела в простраистве. Таким образом, изучеиие даииого случая движения сводится к изучеиию движеиия сферической фигуры по поверхности сферы. В свою очередь положение фигуры на сфере определяется положеиием ее двух точек, или сферического отрезка, соединяющего их.

Геометрическое представление движения твердого тела вокруг иеподвижной точки осиовывается на следующей теореме о перемещеииях сферической фигуры по поверхиости сферы: любое перемещеиие сферической фигуры по поверхиости сферы может быть достигиуто поворотом ее вокруг некоторой прямой, проходящей через иеподвижную точку $C$ и цеитр сферы $O$.

Для доказательства обратимся к рисуику 2.5, где $AB$ и $A_1B_1$ — два произвольиых положения сферического отрезка. Соедииим точки $A$, $A_1$ и $B$, $B_1$ дугами больших кругов и из середииы каждой восстаиовим сферические перпендикуляры. В пересечении перпеидикуляров получаем искомую точку $C$. Прямая $OC$ и будет служить осью поворота при перемещении тела из первого положения во второе. Действительио, дуги $BC$ и $B_1C$, а также дуги $AC$ и $A_1C$ равиы по построению. Отсюда следует равенство сферических треугольииков $ACB$ и $A_1CB_1$. (Чтобы ие загромождать рисуиок, оии обозначеиы вершииой и осноaииями.) При повороте тела вокруг оси на иекоторый угол оба треугольиика совпадут всеми точками.

Любое коиечиое вращеиие тела можно рассматривать как совокупиость бесконечио малых вращений, т. е. поворотов на бескоиечио малые углы за бесконечио малые промежутки времеии. Теорема верна и для бесконечио малых перемещеиий, так что *в любой момент времени распределение скоростей между точками тела таково, каким оно было бы при вращении тела вокруг неподвижной оси вращения $OC$*. Этот результат можио выразить ииаче: в любой момент времеии в теле можио провести прямую, проходящую через иеподвижиую точку так, что все точки прямой в даиный момеит времеии имеют скорости, равиые иулю. Эта прямая иазывается *мгновенной осью* вращеиия тела (штрихованиой системы).

Подчеркием, что в общем случае мгиовеииая ось имеет только одиу все время иеподвижиую точку — полюс, положеиие же оси

в подвижной системе (а вместе с тем и в неподвижной) *непрерывно изменяется.* Для учета положения мгновенной оси в теле и поворота тела вокруг оси вводят *вектор бесконечно малого угла поворота.* Обозначим его $\vec{d\varkappa}$. Модуль этого вектора равен элементарному углу поворота вокруг мгновенной оси. Прямая, на которой расположен вектор, совпадает с мгновенной осью, а направлен он так, что с вершины вектора вращение кажется происходящим против часовой стрелки.

Определим перемещение точки $M$ твердого тела при элементарном повороте $d\varkappa$ в нештрихованной системе (точка $M$ неподвижна в штрихованной системе). Из рисунка 2.6 видно, что $\vec{dr'}$ направлен перпендикулярно плоскости векторов $\vec{d\varkappa}$ и $\vec{r'}$ (за лист бумаги). Модуль перемещения равен:

$$dr' = d\varkappa\rho = d\varkappa r' \sin(\vec{d\varkappa}, \wedge \vec{r'}),$$

а с учетом направления векторов

$$\vec{dr'} = [\vec{d\varkappa}\, \vec{r'}]. \tag{2.2}$$

Эта важная формула применима для любого вектора, имеющего начало в полюсе и неподвижного в штрихованной системе. Его приращение будет находиться по (2.2).

Векторный характер величины $\vec{d\varkappa}$ неочевиден, мы произвольно приписали углу направление. Для векторов должно выполняться векторное правило сложения с перестановочным законом. Поэтому для бесконечно малых поворотов должно иметь место следующее свойство: два бесконечно малых поворота приводят к одному и тому же результату при любой последовательности их выполнения. Найдем приращение радиус-вектора в результате двух поворотов $\vec{d\varkappa_1}$ и $\vec{d\varkappa_2}$, выполненных в разной последовательности. Первый поворот переводит вектор $\vec{r'}$ в следующий вектор:

$$\vec{r'} + [\vec{d\varkappa_1}\vec{r'}];$$

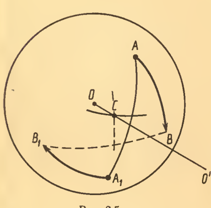


Рис. 2.5.

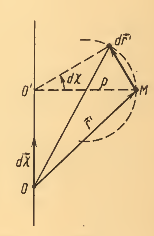


Рис. 2.6.

второй поворот дает найденному вектору приращение

$$[\overrightarrow{d\varkappa}_2(\vec{r}\,' + [\overrightarrow{d\varkappa}_1\vec{r}\,'])] = [\overrightarrow{d\varkappa}_2\vec{r}\,'] + [\overrightarrow{d\varkappa}_2[\overrightarrow{d\varkappa}_1\vec{r}\,']].$$

В результате получилось приращение

$$d\vec{r}\,'_{1,2} = [\overrightarrow{d\varkappa}_1\vec{r}\,'] + [\overrightarrow{d\varkappa}_2\vec{r}\,'] + [\overrightarrow{d\varkappa}_2[\overrightarrow{d\varkappa}_1\vec{r}\,']].$$

При обратной последовательности имеем:

$$d\vec{r}_{2,1} = [\overrightarrow{d\varkappa}_2\vec{r}\,'] + [\overrightarrow{d\varkappa}_1\vec{r}\,'] + [\overrightarrow{d\varkappa}_1[\overrightarrow{d\varkappa}_2\vec{r}\,']].$$

Но $d\vec{r}\,'_{1,2} = d\vec{r}\,'_{2,1}$ с точностью до бесконечно малых второго порядка. Это подтверждает векторный характер величины $\overrightarrow{d\varkappa}$.

Однако конечные углы поворота таким свойством отнюдь не обладают; от последовательности поворотов существенно зависит результат. Поэтому нельзя считать $\overrightarrow{d\varkappa}$ векторным дифференциалом угла $\varkappa$, что и подчеркнуто в нашем обозначении: $\overrightarrow{d\varkappa}$ — вектор, а $\varkappa$ не является вектором, т. е. мы не пишем $d\vec{\varkappa}$.

*Угловой скоростью вращения тела* относительно нештрихованной системы называется *вектор* $\vec{\omega}$, *равный отношению* $\overrightarrow{d\varkappa}$ *к* $dt$:

$$\vec{\omega} = \frac{\overrightarrow{d\varkappa}}{dt} \qquad (2.3)$$

Угловая скорость направлена по мгновенной оси вращения. *В общем случае ее модуль и направление (в подвижной системе и в неподвижной) непрерывно изменяются с течением времени.* Заметим также, что определение угловой скорости, данное для твердого тела, относится и к вращению штрихованной системы.

После деления (2.2) на элемент времени $dt$, в течение которого совершается бесконечно малое перемещение, приходим к формуле распределения скоростей точек твердого тела (подвижной системы), с которыми они движутся в неподвижной системе, т. е.

$$\vec{v} = [\vec{\omega}\,\vec{r}\,']. \qquad (2.4)$$

Вектор $\vec{v}$ в формуле (2.4) может интерпретироваться как скорость движения конца вектора $\vec{r}\,'$ в нештрихованной системе. В силу применимости (2.2) к любому неподвижному в штрихованной системе вектору формула (2.4) может быть написана для любой векторной величины и истолкована, как формула скорости изменения данной величины в нештрихованной системе. В частности, для орт штрихованной системы получаем:

$$\dot{\vec{i}}\,' = [\vec{\omega}\vec{i}\,'],\ \dot{\vec{j}}\,' = [\vec{\omega}\,\vec{j}\,'],\ \dot{\vec{k}}\,' = [\vec{\omega}\,\vec{k}\,']. \qquad (2.5)$$

По своему определению угловая скорость — скользящий вектор, т. е. точка приложения его на оси не фиксирована. В соответствии с определением элементарного вращения угловая скорость (в каждый момент времени) может быть представлена тем или иным разложением на составляющие, в частности разложением по осям штрихованной системы

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{x'} + \vec{\omega}_{y'} + \vec{\omega}_{z'} \qquad (2.6)$$

или разложением по осям $O'z'$, $Oz$ и линии узлов $ON$ (см. рис. 2.2):

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{\psi} + \vec{\omega}_{\vartheta} + \vec{\omega}_{\varphi}. \qquad (2.7)$$

Физический смысл разложений состоит в замене элементарного вращения $\overrightarrow{d\varkappa}$ совокупностью вращений $\overrightarrow{d\varkappa_x}$, $\overrightarrow{d\varkappa_y}$, $\overrightarrow{d\varkappa_z}$ в первом и $\overrightarrow{d\psi}$, $\overrightarrow{d\vartheta}$, $\overrightarrow{d\varphi}$ во втором случае.

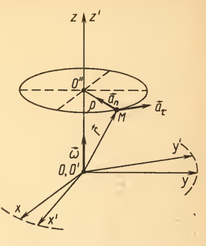



Рис. 2.7.

**2.4. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.** Этот частный случай движения твердого тела очень часто встречается в технике и требует более подробного рассмотрения. Неподвижность мгновенной оси вращения означает неизменное ее положение в теле и в пространстве. В данном случае она называется просто осью вращения. Если совместить оси $O'z'$ и $Oz$ подвижной и неподвижной систем координат с осью вращения тела, то при движении будет изменяться только угол $\varphi$ (рис. 2.7). При таком движении тело обладает одной вращательной степенью свободы. Кинематическое уравнение вращательного движения задает угол как функции времени: $\varphi = \varphi(t)$. Во время движения отдельные точки тела описывают окружности с центрами на оси вращения. Перемещения точек тела за один и тот же промежуток времени неодинаковы и пропорциональны расстояниям их до оси вращения. Также неодинаковы и скорости различных точек тела.

В данном случае вращение полностью характеризуется модулем угловой скорости (или с учетом направления вращения проекцией на ось):

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \qquad (2.8)$$

Обозначая через $\rho$ расстояние точки тела до оси вращения, получаем выражение для скорости этой точки: $v = \omega\rho = \dot{\varphi}\rho$. Полученная формула дает распределение величин скоростей между точками тела. Направлены скорости по касательным к окружности в сторону вращения. Нетрудно видеть, что в этом случае движение отдельных точек тела удобно описывать естественным методом, при котором ускорение будет складываться из нормального и тангенциального (1.20), причем нормальное ускорение определяется по скорости $v$:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \omega^2\rho.$$

Что касается тангенциального ускорения, то оно обусловлено неравномерностью вращения тела.

*Вторая производная угла поворота φ по времени называется угловым ускорением тела:*

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \ddot{\varphi}. \qquad (2.9)$$

Очевидно, что

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \varepsilon\rho. \qquad (2.10)$$

В случае вращения тела (системы) вокруг неподвижной оси прибегать к проецированию векторных величин на оси неподвижной или подвижной системы оказалось нецелесообразным.

**2.5. Вращение тела вокруг неподвижной точки.** Пусть тело движется относительно нештрихованной системы так, что одна его точка — полюс — остается неподвижной. Это может иметь место на практике, если оно закреплено в одной точке (с помощью карданных шарниров), а также если отдельно от поступательных степеней свободы рассматриваются вращательные.

Описывая аналитически движение твердого тела вокруг неподвижной точки, начала координат подвижной и неподвижной систем совмещают с неподвижной точкой тела. В таком случае положение тела в пространстве определяется углами Эйлера $\psi$, $\vartheta$, $\varphi$ (соответственно тело имеет три вращательные степени свободы движения). Кинематические уравнения движения согласно (2.1) имеют вид:

$$\psi = \psi(t), \ \vartheta = \vartheta(t), \ \varphi = \varphi(t). \qquad (2.11)$$

Кинематические уравнения движения полностью описывают движение тела.

Важной задачей является нахождение распределения скоростей в твердом теле, т. е. нахождение скоростей различных точек тела или точек $\vec{r}'$ движущейся системы. Очевидно, что ответ на нее дает векторная формула (2.4) $\vec{v} = [\vec{\omega}\,\vec{r}']$, где $\vec{r}'$ можно заменить на $\vec{r}$, так как начала систем совпадают.

Для конкретных вычислений надо располагать проекциями скоростей точек на координатные оси. С помощью формулы (2.4) проекции на оси подвижной, штрихованной, системы можно найти. Они таковы:

$$\begin{cases} v_{x'} = \omega_{y'}z' - \omega_{z'}y', \\ v_{y'} = \omega_{z'}x' - \omega_{x'}z', \\ v_{z'} = \omega_{x'}y' - \omega_{y'}x'. \end{cases} \qquad (2.12)$$

Тот же самый вид имеют и проекции скорости точки на оси неподвижной, нештрихованной, системы, так как $\vec{r} = \vec{r}'$, то формулы приобретают вид:

$$\begin{cases} v_x = \omega_y z - \omega_z y, \\ v_y = \omega_z x - \omega_x z, \\ v_z = \omega_x y - \omega_y x. \end{cases} \qquad (2.12a)$$

Решая вопрос, какими проекциями следует пользоваться, нужно иметь в виду, что речь идет об одной скорости — скорости движения точки в неподвижной системе и поэтому выбор системы координат для выражения проекций диктуется только удобствами. Поскольку в общем случае угловая скорость вращения $\vec{\omega}$ — величина переменная, переменными являются и ее проекции в обеих системах. Связь же между проекциями определяется через переменные углы Эйлера. В дальнейшем будет рассматриваться общий случай движения тела, при котором полюс движется и $\vec{r}' \neq \vec{r}$. В таком случае следует остановиться на формулах (2.12).

Для дальнейшего решения поставленной задачи (нахождения проекций скорости точки тела) необходимо знать выражение проекции угловой скорости на оси подвижной системы через кинематические уравнения движения (2.11), заданные для эйлеровых углов. Из векторной алгебры известно, что произвольный вектор можно разложить на составляющие по трем некомпланарным направлениям (правило параллелепипеда). Выберем за эти три направления подвижную ось $O'z'$, линию узлов $ON$ и неподвижную ось $Oz$. Пусть составляющие вектора угловой скорости по этим направлениям для некоторого момента времени равны соответственно $\vec{\omega}_\psi$, $\vec{\omega}_\vartheta$, $\vec{\omega}_\varphi$. (Они показаны на рис. 2.8; здесь $\vec{\omega}$, чтобы не загромождать чертеж, не изображена.) Имеет место векторное равенство $\vec{\omega} = \vec{\omega}_\psi + \vec{\omega}_\vartheta + \vec{\omega}_\varphi$. Проецируя это равенство, например на $Ox'$, получим: $\omega_{x'} = \omega_{\psi x'} + \omega_{\vartheta x'} + \omega_{\varphi x'}$. Для нахождения $\omega_{x'}$ необходимо знать проекции составляющих $\vec{\omega}_\psi$, $\vec{\omega}_\vartheta$, $\vec{\omega}_\varphi$ на $Ox'$. Также обстоит дело с проекциями на остальные оси.

В свою очередь угловые скорости $\vec{\omega}_\psi$, $\vec{\omega}_\vartheta$, $\vec{\omega}_\varphi$ являются угловыми скоростями вращения тела вокруг соответствующих осей. Например, $\vec{\omega}_\varphi$ — угловая скорость вращения вокруг неподвижной оси $Oz$, связанная только с изменением угла $\varphi$. Отсюда модуль ее

$$\omega_\varphi = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}.$$

Аналогичное положение имеет место и для остальных составляющих. Таким образом, имеем:

$$\omega_\psi = \dot{\psi},\ \omega_\vartheta = \dot{\vartheta},\ \omega_\varphi = \dot{\varphi}.$$

Проецирование составляющих на оси подвижной системы производим, пользуясь рисунком 2.8. Для проецирования вектора $\vec{\omega}_\varphi$ предварительно разложим его в плоскости $Ozz'$ по правилу параллелограмма на две составляющие: $\overrightarrow{OB}$ — по оси $Oz'$ и $\overrightarrow{OM}$ в плоскости $x'Oy'$ подвижной системы. Для модулей этих составляющих имеем:

$$OB = \omega_\varphi \cos\vartheta,\ OM = \omega_\varphi \sin\vartheta.$$

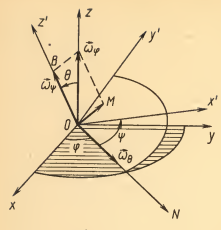



Рис. 2.8.

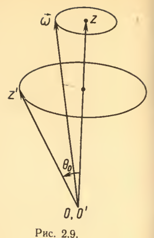



Рис. 2.9.

Заметим, что составляющая $\overrightarrow{OM}$ перпендикулярна линии узлов $ON$. Можно легко найти и проекции вектора $\vec{\omega}_\varphi$ на оси подвижной системы. Получается

$$\omega_{\varphi x'} = \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi, \; \omega_{\varphi y'} = \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos\psi, \; \omega_{\varphi z'} = \dot{\varphi} \cos \vartheta.$$

Проецирование составляющих $\vec{\omega}_\psi$ и $\vec{\omega}_\vartheta$ значительно проще, поэтому результаты выпишем без пояснений:

$$\omega_{\psi x'} = \omega_{\psi y'} = 0, \; \omega_{\psi z'} = \dot{\psi};$$

$$\omega_{\vartheta x'} = \dot{\vartheta} \cos \psi, \; \omega_{\vartheta y'} = -\dot{\vartheta} \sin \psi, \; \omega_{\vartheta z'} = 0.$$

Теперь можно написать искомые формулы, выражающие проекции угловой скорости на подвижные оси:

$$\begin{cases} \omega_{x'} = \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi, \\ \omega_{y'} = \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi, \\ \omega_{z'} = \dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}. \end{cases} \tag{2.13}$$

Данные формулы называются *кинематическими уравнениями Эйлера.* С помощью формул (2.13) и кинематических уравнений движения (2.11) оказывается возможным найти $\omega_{x'}$, $\omega_{y'}$, $\omega_{z'}$ как функции времени. По формулам (2.12) находим проекции скоростей движения точек тела для любого момента времени.

Аналогично можно найти проекции скорости на неподвижные оси. Что касается ускорений точки, то в общем виде этот вопрос рассматривать не будем, так как общие громоздкие выражения ускорений малоупотребительны.

Пример 2.1. **Вычисление модуля угловой скорости вращения тела вокруг неподвижной точки.**

При решении нельзя воспользоваться составляющими $\omega_\psi$, $\omega_\varphi$ и $\omega_\vartheta$, так как они не ортогональны. Поэтому следует использовать формулы (2.13). С их помощью

записываем выражение для квадрата модуля угловой скорости:

$$\omega^2 = \omega_{x'}^2 + \omega_{y'}^2 + \omega_{z'}^2 = \dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\vartheta.$$

Пример 2.2. **Нахождение проекций угловой скорости на оси неподвижной системы.**

Проецируя вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ с помощью рисунка 2.8 на оси неподвижной системы, имеем:

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\vartheta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\vartheta\sin\varphi, \\ \omega_y = \dot{\vartheta}\sin\varphi - \dot{\psi}\sin\vartheta\cos\varphi, \\ \omega_z = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta. \end{cases} \tag{2.14}$$

Очевидно, что выражение квадрата модуля угловой скорости в этой системе должно быть таким же, как и в подвижной:

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = \dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\vartheta.$$

Пример 2.3. **Регулярная прецессия.**

Пусть кинематические уравнения движения таковы:

$$\psi = \omega_1 t,\ \vartheta = \vartheta_0,\ \varphi = \omega_2 t,$$

т. е. углы прецессии и собственного вращения изменяются равномерно, а угол нутации постоянен. Это движение и называется *регулярной прецессией.*

Мгновенная угловая скорость равна:

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2\cos\vartheta,$$

т. е. это величина по модулю постоянная. Найдем также все проекции угловой скорости на оси подвижной и неподвижной систем:

$$\begin{aligned} \omega_{x'} &= \omega_1 \sin\vartheta_0 \sin\omega_2 t, & \omega_x &= \omega_2 \sin\vartheta_0 \sin\omega_1 t, \\ \omega_{y'} &= \omega_1 \sin\vartheta_0 \cos\omega_2 t, & \omega_y &= -\omega_2 \sin\vartheta_0 \cos\omega_1 t, \\ \omega_{z'} &= \omega_1 \cos\vartheta_0 + \omega_2, & \omega_z &= \omega_1 + \omega_2 \cos\vartheta_0. \end{aligned}$$

Проекции угловой скорости на оси $O'z'$ и $O'z$ остаются постоянными, следовательно, сохраняются углы между угловой скоростью $\omega$ и осями $O'z'$ и $O'z$. Но это также означает, что вектор $\vec{\omega}$ постоянно находится в плоскости $O'z'z$ и перпендикулярен линии узлов. Таким образом, штрихованная система, изменяя свою ориентацию в нештрихованной, вращается вокруг мгновенной оси с постоянной угловой скоростью, а сама ось — вокруг $O'z$ с угловой скоростью $\dot{\varphi} = \omega_2$. Ось $O'z'$ также вращается вокруг $Oz$ с угловой скоростью $\omega_2$. Значит, вращение тела можно представить как вращение его оси $O'z'$ с угловой скоростью $\omega_2$ вокруг оси $O'z$, и вращение вокруг этой оси с угловой скоростью $\omega_1$ при постоянном угле между осями $\vartheta_0$ (рис. 2.9).

## § 3. Сложное движение точки

**3.1. Неподвижная и подвижная системы отсчета.** При геометрическом описании движения, которым занимается кинематика, выбор системы отсчета не ограничен каким-либо условием. В принципе для описания движения можно пользоваться любыми системами, движущимися относительно друг друга как угодно. Но практически нецелесообразно выбирать систему отсчета наудачу, так как движение одного и того же объекта по отношению к разным системам может быть самым различным и выглядеть в одних системах очень сложно, а в других просто.

Например, движение планет Солнечной системы относительно Земли запутано и в геоцентрической системе мира (система Птолемея) приходилось прибегать к весьма сложным объяснениям.

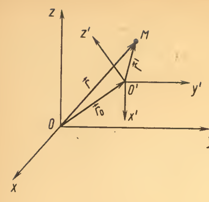



Рис. 3.1.

Движение планет относительно Солнца (гелиоцентрическая система Коперника) значительно проще, и рассмотрение движения планет именно в этой системе позволило установить основной закон небесной механики — закон всемирного тяготения Ньютона. А зная движение планет вокруг Солнца, далее можно установить и их движение относительно Земли. В ряде случаев задачу об описании движения расчленяют на два этапа. Рассмотрим две системы отсчета, движение которых относительно друг друга известно, и пусть известно движение точки относительно одной из систем. Каково будет движение точки относительно второй? Этот вопрос и разрешается в данном параграфе.

Назовем условно систему отсчета, относительно которой надо определить движение точки, *неподвижной*, вторую — *подвижной*[1]. Движение точки относительно первой системы можно рассматривать как наложение двух составляющих движений: движения точки относительно подвижной системы (назовем его *относительным* движением) и движения точки относительно неподвижной системы, когда точка покоится в подвижной системе (это движение назовем *переносным*).

Примером такого разложения сложного движения на составляющие — относительное и переносное — является движение пассажира на движущемся судне. Его движение относительно берегов (сложное движение) представляет результат сложения движения пассажира относительно судна (относительное движение) и движения той точки судна, в которой в данный момент находится пассажир (переносное движение).

Основная задача при сложении движений состоит в нахождении параметров (скорости, ускорения и др.) сложного движения по известным параметрам составляющих движений. С неподвижной системой отсчета свяжем прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ (систему $K$, или нештрихованную), а с подвижной $O'x'y'z'$ (систему $K'$, или штрихованную), что показано на рисунке 3.1. Через $\vec{r}$ обозначен радиус-вектор, определяющий положение точки $M$ в неподвижной системе, через $\vec{r}'$ — радиус-вектор той же точки в подвижной системе, $\vec{r}_0$ — радиус-вектор начала координат подвижной системы в неподвижной. Между этими радиус-векторами для любого момента времени имеет место соотношение

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'. \qquad (3.1)$$

[1] Физический анализ вопроса о существовании или отсутствии абсолютно неподвижной системы в природе отложим до II части курса. (См. также § 5.)

При всей кажущейся очевидности этого равенства оно физически не тривиально, ибо $\vec{r}$, $\vec{r}_0$, с одной стороны, и $\vec{r}'$ — с другой, измеряются в *разных* системах. Равенство основано на допущении о том, что длина и направление отрезка не зависят от характера и скорости его движения в системе. Последнее же вытекает из ранее принятого постулата о бесконечно быстрых сигналах и возможной синхронизации часов в движущихся системах с их помощью.

Рассмотрим ход времени в движущейся системе. Часы синхронизируются во всех системах отсчета так же, как в одной; с помощью бесконечно быстрых сигналов ставятся на один и тот же момент времени. А это означает, что момент времени, в который происходит некоторое событие, один и тот же во всех системах, т. е.

$$t = t'. \tag{3.2}$$

Из равенства (3.2) вытекает, что промежутки времени в разных системах между двумя событиями одинаковы: $\Delta t = \Delta t'$.

Определим теперь понятие длины движущегося отрезка. *Длиной отрезка называется расстояние между одновременными положениями (засечками) его концов, измеренное наложением масштаба в данной системе отсчета.* Это определение годится как для системы, где отрезок покоится, так и для системы, где он движется. Полезно заметить, что такое уточнение длины движущегося отрезка необходимо, ибо она ранее не была определена вообще. В формуле (3.1) $r$ и $r_0$ — длины покоящихся в нештрихованной системе отрезков, тогда как $r'$ — длина движущегося в ней отрезка. Эта длина может быть получена только описанным выше способом, т. е. измерена как расстояние между одновременными засечками его концов. Но моменты засечек одни и те же как в движущейся системе, так и в покоящейся, т. е. измеряется расстояние между парой одних и тех же точек. Поэтому $r'$ есть длина отрезка как в неподвижной, так и в подвижной системе, и, следовательно, можно написать равенство (3.1), в котором $\vec{r}$ и $\vec{r}_0$ измерены в неподвижной системе, а $\vec{r}'$ — в подвижной. По этой же причине равенство (3.1) можно рассматривать в проекциях как в неподвижной, так и в движущейся системе. Равенство (3.1) служит основанием для всех кинематических соотношений сложного движения.

**3.2. Сложение скоростей.** Напишем равенство (3.1) в другом виде, для чего разложим радиус-вектор точки $\vec{r}'$ по ортам подвижной системы:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'. \tag{3.3}$$

Проецируя векторное равенство (3.3) на оси неподвижной или подвижной системы координат, можно получить известные из аналитической геометрии формулы преобразования координат для перехода от штрихованной системы координат к нештрихованной.

Для нахождения закона сложения скоростей продифференци-

руем (3.3) по времени, учитывая (3.2). Имеем:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\left(\frac{d\vec{r}_0}{dt}+x'\frac{d\vec{i}'}{dt}+y'\frac{d\vec{j}'}{dt}+z\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)+\left(\frac{dx'}{dt}\vec{i}'+\frac{dy'}{dt}\vec{j}'+\frac{dz'}{dt}\vec{k}'\right).$$

Левая часть полученного равенства дает вектор скорости сложного движения точки $M$, который обозначим $\vec{v}_\text{а}$,— абсолютную скорость. Для того чтобы в правой части выделить члены, определяющие скорости относительного и переносного движений, заметим, что сложное движение точки совпадает с относительным, если штрихованная система неподвижна. Аналитически это означает, что начало координат штрихованной системы неподвижно и единичные координатные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ постоянны. Тогда все члены в первой скобке обращаются в нули, а вторая скобка дает выражение вектора относительной скорости точки $M$:

$$\vec{v}_\text{от}=\frac{dx'}{dt}\vec{i}'+\frac{dy'}{dt}\vec{j}'+\frac{dz'}{dt}\vec{k}'.$$

Для получения скорости переносного движения следует закрепить точку $M$ в подвижной системе, т. е. считать ее относительные координаты $x'$, $y'$, $z'$ постоянными величинами. Тогда первая скобка не обращается в нуль и дает искомую скорость переносного движения точки $M$:

$$\vec{v}_\text{п}=\frac{d\vec{r}_0}{dt}+x'\frac{d\vec{i}'}{dt}+y'\frac{d\vec{j}'}{dt}+z'\frac{d\vec{k}'}{dt}. \qquad (3.4)$$

Заметим, что первое слагаемое дает часть скорости переносного движения точки $M$, обусловленную поступательным движением системы и совпадающую со скоростью движения начала координат $O'$ — полюса системы. Остальные три слагаемые представляют часть скорости переносного движения, обусловленную вращением подвижной системы координат вокруг точки $O'$.

Если обозначим вектор угловой скорости вращения системы координат $\vec{\omega}$, то на основании формулы (2.5) получаем очень важное соотношение:

$$x'\frac{d\vec{i}'}{dt}+y'\frac{d\vec{j}'}{dt}+z'\frac{d\vec{k}'}{dt}=[\vec{\omega}\,\vec{i}'x']+[\vec{\omega}\,\vec{j}'y']+[\vec{\omega}\,\vec{k}'z']=[\vec{\omega}\,\vec{r}'].$$

Скорость переносного движения теперь может быть представлена иначе:

$$\vec{v}_\text{п}=\frac{d\vec{r}_0}{dt}+[\vec{\omega}\,\vec{r}']. \qquad (3.5)$$

Для абсолютной скорости сложного движения получаем окончательный результат:

$$\vec{v}_\text{а}=\frac{d\vec{r}_0}{dt}+[\vec{\omega}\,\vec{r}']+\vec{v}_\text{от}=\vec{v}_\text{п}+\vec{v}_\text{от}, \qquad (3.6)$$

выражающий закон сложения скоростей.

**3.3. Сложение ускорений.** Чтобы получнть формулу сложения ускорений, надо (3.3) дважды проднфференцнровать по временн. Имеем:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left(\frac{d^2\vec{r_0}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i'}}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j'}}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k'}}{dt^2}\right) + 2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k'}}{dt}\right) + \left(\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k'}\right).$$

Левая часть в этом равенстве дает ускорение точки $M$ в сложном движенин. Анализ членов правой части равенства проводим следующим образом. Желая выделить ускорение точки $M$ в ее относительном движенин, полагаем $\vec{r_0}$, $\vec{i'}$, $\vec{j'}$, $\vec{k'}$ постоянными велнчинами. Тогда в правой части не обратятся в нуль только трн последние члена. Они и дают *ускорение относительного движения:*

$$\vec{a}_{от} = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k'}. \qquad (3.7)$$

Для выделения *переносного* ускорення полагаем относительные коордннаты $x'$, $y'$, $z'$ постояннымн. Тогда не обратятся в нуль только четыре первых слагаемых правой части. Ускорение в переносном движении

$$\vec{a}_п = \frac{d^2\vec{r_0}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i'}}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j'}}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k'}}{dt^2}.$$

Первое слагаемое представляет часть переносного ускорения, обусловленную поступательным ускоренным движением системы, и совпадает с ускорением начала коордннат $O'$, остальные трн слагаемых представляют часть переносного ускорення, обусловленную вращеннем подвнжной системы коордннат вокруг точки $O'$. Пользуясь формулами (2.5), преобразуем переносное ускорение:

$$\frac{d^2\vec{r_0}}{dt^2} + x'\frac{d}{dt}[\vec{\omega}\,\vec{i'}] + y'\frac{d}{dt}[\vec{\omega}\,\vec{j'}] + z'\frac{d}{dt}[\vec{\omega}\,\vec{k'}] = \frac{d^2\vec{r_0}}{dt^2} + x'\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\vec{i'}\right] + y'\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\vec{j'}\right] + z'\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\vec{k'}\right] + x'[\vec{\omega}[\vec{\omega}\,\vec{i'}]] + y'[\vec{\omega}[\vec{\omega}\,\vec{j'}]] + z'[\vec{\omega}[\vec{\omega}\,\vec{k'}]],$$

отсюда

$$\vec{a}_п = \frac{d^2\vec{r_0}}{dt} + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\vec{r'}\right] + [\vec{\omega}[\vec{\omega}\,\vec{r'}]].$$

Производная вектора угловой скорости по времени $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$ называется *угловым ускорением.* Переносное ускоренне

$$\vec{a}_п = \frac{d^2\vec{r_0}}{dt^2} + [\vec{\varepsilon}\,\vec{r'}] + [\vec{\omega}[\vec{\omega}\,\vec{r'}]] \qquad (3.8)$$

состоит соответственно из *переносного поступательного, переносного*

*вращательного* и *переносного центростремительного.* Вектор центростремительного ускорения направлен по перпендикуляру к мгновенной оси вращения.

Но полное ускорение сложного движения не равно сумме относительного и переносного ускорений: в правой части имеются еще слагаемые, не относящиеся ни к переносному, ни к относительному ускорению. На существование ускорения особого рода в сложном движении впервые обратил внимание французский математик Кориолис. Оставшиеся в правой части члены определяют *ускорение Кориолиса* для сложного движения точки $M$. Оно равно:

$$\vec{a}_к = 2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k}'}{dt}\right).$$

С помощью формул (2.5) ускорению Кориолиса можно придать другой вид. Подставляя в последнее равенство значения $\frac{d\vec{i}'}{dt}$, $\frac{d\vec{j}'}{dt}$, $\frac{d\vec{k}'}{dt}$, имеем:

$$\vec{a}_к = 2\left[\vec{\omega}\left(\frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'\right)\right] = 2[\vec{\omega}\,\dot{\vec{r}}'].$$

Отсюда следует:

$$\vec{a}_к = 2[\vec{\omega}\,\vec{v}_{от}]. \quad (3.9)$$

Как видно из (3.9), ускорение Кориолиса не обращается в нуль только тогда, когда $\vec{\omega} \neq 0$ и $\vec{v}_{от} \neq 0$, т. е. когда точка находится в движении по отношению к вращающейся системе отсчета. Кроме того, векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{v}_{от}$ не должны быть коллинеарными. Ускорение Кориолиса направленно перпендикулярно плоскости, определяемой векторами $\vec{\omega}$ и $\vec{v}_{от}$.

Для уяснения происхождения ускорения Кориолиса рассмотрим простой пример. Пусть точка $M$ движется с постоянной скоростью $v_{от}$ вдоль радиуса диска $OA$, вращающегося с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$, как показано на рисунке 3.2. Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ направлен за плоскость чертежа, и ускорение Кориолиса по (3.9) лежит в плоскости чертежа и направлено перпендикулярно радиусу $OA$ в сторону вращения. Его модуль $a_к = 2\omega v_{от}$, так как векторы $v_{от}$ и $\omega$ взаимно перпендикулярны. Относительное ускорение в данном случае отсутствует, так как относительная скорость постоянна. Переносное ускорение есть центростремительное (нормальное) ускорение точки $M$ при ее равномерном движении по окружности.

Вследствие изменения расстояния от точки $M$ до оси вращения переносная скорость, равная $\omega r$, изменяется. Приращение переносной скорости за $dt$ секунд составляет $\omega v_{от} dt$, а скорость приращения $\omega v_{от}$ равна половине ускорения Кориолиса. Нетрудно видеть, что направление ускорения, определяемого изменением переносной скорости, совпадает с направлением ускорения $\vec{a}_к$. Вторая половина ускорения вызвана изменением направления $\vec{v}_{от}$ вследствие вращения диска. Приращение $dv_{от}$ за $dt$ секунд составляет $\omega v_{от} dt$ (см. рис. 3.3). Отсюда ускорение движения вследствие изменения направления вектора относительной скорости имеет величину $\omega v_{от}$, также равную половине ускорения Кориолиса.

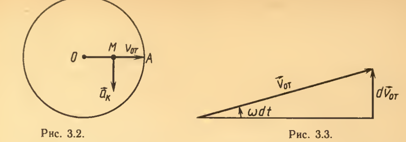



Рис. 3.2. Рис. 3.3.

Из приведенного примера видно, что ускорение Кориолиса обусловлено изменением величины переносной скорости при относительном движении точки во вращающейся системе (здесь величина переносной скорости зависит от расстояния точки до оси вращения), а также изменением направления вектора относительной скорости вследствие вращения системы.

Итак, *ускорение в сложном движении равно геометрической сумме трех ускорений: переносного, относительного* и *ускорения Кориолиса,* т. е.

$$\vec{a}_а = \vec{a}_п + \vec{a}_{от} + \vec{a}_к. \tag{3.10}$$

В частностных случаях та или иная составляющая ускорения может обращаться в нуль.

**3.4. Преобразования Галилея.** Важным случаем преобразований координат, скоростей, ускорений, рассмотренных выше, является следующий: подвижная система движется в неподвижной равномерно, прямолинейно, поступательно со скоростью $\vec{v}_п$:

$$\vec{r} = \vec{v}_п t + \vec{r}', \quad \vec{v} = \vec{v}_п + \vec{v}'. \tag{3.11}$$

Физически этот случай замечателен тем, что если нештрихованная система инерциальна, то инерциальна и штрихованная. В рассматриваемом случае (без ограничения общности в силу изотропии пространства и равноправия всех декартовых осей) можно выбрать направления осей $Ox$ и $O'x'$, совпадающие со скоростью движения точки $O'$ в системе $Oxy$, обозначаемой $\vec{V}$, а за начальный момент времени принять момент совпадения точек $O$ и $O'$. В таком случае (3.1) приводит в декартовых координатах к формулам

$$x = x' + Vt, \; y = y', \; z = z'. \tag{3.12}$$

Эти формулы вместе с рассмотренной ранее формулой (3.2) для времени $t = t'$ носят название формул преобразования координат Галилея.

Очевидно также, что для скорости в проекциях на оси имеем:

$$v_x = V + v_{x'}, \; v_y = v_{y'}, \; v_z = v_{z'}. \tag{3.13}$$

Наконец, (3.10) дает: $\vec{a}_а = \vec{a}_{от}$, т. е. ускорение является инвариантом при преобразованиях Галилея.

**3.5*. Сложное движение твердого тела**[1]. Как уже выяснено в § 2, для описания движения свободного твердого тела надо задать шесть независимых кинематических уравнений (2.1): три координаты полюса $x_0$, $y_0$, $z_0$ и три эйлеровых угла $\psi$, $\vartheta$, $\varphi$ как функции времени.

Радиус-вектор, определяющий движение произвольной точки твердого тела, определяется формулой (3.1): $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$. Далее все выводы, сделанные относительно движения точки в штрихованной и нештрихованной системах, можно повторить для точки твердого тела с координатами $x'$, $y'$, $z'$, с тем лишь условием, что $\vec{r}'$ — постоянный вектор в штрихованной системе. Таким образом, будет справедлива формула для скорости точки относительно неподвижной системы:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}\,\vec{r}']. \tag{3.14}$$

В формуле для ускорений (3.10) исчезнут относительное и кориолисово ускорения; останется одно переносное:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\,\vec{r}'\right] + \left[\vec{\omega}[\vec{\omega}\,\vec{r}']\right]. \tag{3.15}$$

В общем случае движение твердого тела может быть представлено как поступательное движение дополнительной системы координат $O'xyz$ с началом в полюсе $O'$ и вращательное вокруг неподвижной точки в этой системе. В таком случае в формулах (3.14) и (3.15) первое слагаемое относится к поступательному движению, а остальные — к вращательному.

Таким образом, все сказанное в § 2 о движении твердого тела применимо к случаю сложного движения. В частности, не только скорость, но и ускорение любой точки можно вычислить по заданным кинематическим уравнениям, проецируя равенство (3.15) на оси неподвижной системы и используя проекции угловой скорости, выраженные через эйлеровы углы с помощью формул (2.14).

Однако в большинстве практически важных случаев вращательное и центростремительное ускорения точки находятся с помощью естественного метода. Вращательное ускорение оказывается тангенциальным: $a_\tau = \frac{dv}{dt}$, а центростремительное — нормальным: $a_n = \frac{v^2}{R}$, так как точка движется по некоторой известной окружности.

В связи с описанием движения материальной точки в различных системах отсчета важную и физически содержательную интерпретацию получает понятие сложения скоростей и ускорений. Сумма двух скоростей трактуется, например, как результат относительного и переносного движения в некоторой системе. Поэтому все сказанное о сложении скоростей и ускорений может быть перенесено на одну из составляющих движения твердого тела — на движение его полю-

[1] Звездочкой отмечен материал, который при первом чтении можно опустить без нарушения главной логической линии курса. Однако часть таких параграфов необходима далее в последующих разделах и к ним приходится возвращаться.

са. Однако вопрос о сложении угловых скоростей твердого тела не тривиален и требует особого анализа.

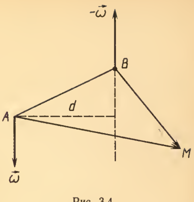


Рис. 3.4.

Прежде всего математические операции сложения и разложения угловых скоростей можно трактовать с точки зрения относительного движения. Так, если $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$, то можно считать $\vec{\omega}_1$ угловой скоростью переносного движения, т. е. угловой скоростью вращения подвижной, штрихованной, системы в неподвижной, нештрихованной, системе, а $\vec{\omega}_2$ — угловой скоростью вращения тела в подвижной системе. Тогда $\vec{\omega}$ — угловая скорость тела в неподвижной системе.

Но при сложении вращательных движений возможны два различных случая: мгновенные оси складываемых вращений пересекаются между собой и не пересекаются. В первом случае по обычному правилу сложения определяется сумма векторов (вектор угловой скорости скользящий; его можно переносить вдоль линии вектора) и находится новая мгновенная ось.

Для анализа второго случая вначале рассмотрим вращение твердого тела вокруг параллельных осей с равными по величине, но противоположными по направлению угловыми скоростями $\vec{\omega}_1 = -\vec{\omega}_2$. Такая совокупность угловых скоростей образует *пару вращений*. Нетрудно видеть, что пара вращений дает поступательное движение. Действительно, пусть $A$ и $B$ — какие-нибудь точки на мгновенных осях составляющих вращений (рис. 3.4). Тогда скорость любой точки тела в сложном движении будет равна:

$$\vec{v} = [\vec{\omega}_1\overrightarrow{AM}] - [\vec{\omega}_1\overrightarrow{BM}] = [\vec{\omega}_1(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM})] = [\vec{\omega}_1\overrightarrow{AB}]$$

или

$$\vec{v} = [\vec{\omega}_2\overrightarrow{BA}].$$

Следовательно, скорости всех точек тела одинаковы и пара вращений эквивалентна поступательной скорости: $\vec{v} = [\vec{\omega}\overrightarrow{AB}]$.

Скорость результирующего поступательного движения перпендикулярна к плоскости пары векторов $\vec{\omega}$ и $-\vec{\omega}$ и направлена так, что с направлением векторов пары образуют правый винт. Вектор $\vec{v}$ называется *моментом пары*. Величина момента пары определяется произведением плеча пары на величину угловой скорости: $v = \omega d$.

На рисунке 3.5. показано взаимное расположение векторов пары и ее момента. Момент пары есть свободный вектор, так как он представляет собой скорость поступательного движения тела и может быть отнесен к любой его точке.

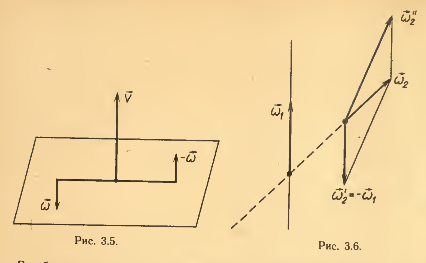



Рис. 3.5.

Рис. 3.6.

В общем случае два складываемых вращения имеют скорости $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$, лежащие на скрещивающихся прямых (рис. 3.6). Разлагая вектор $\vec{\omega}_2$ на $\vec{\omega}_2' = -\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2''$, имеем пару с моментом $\vec{v} = [\vec{\omega}_1 \vec{d}]$ и вращение с угловой скоростью $\omega_2''$.

Итак, любое сложное движение тела в любой момент времени можно представить как поступательное движение со скоростью полюса и вращательное вокруг оси, проходящей через полюс.

## § 4*. Геометрические преобразования системы координат. Векторные и скалярные физические величины

Ранее подчеркивалось, что координаты материальной точки имеют смысл в той или иной системе отсчета. Однако все системы координат, связанные с одним и тем же телом отсчета, физически равноправны. Поэтому желательна такая математическая форма записи физических законов, которая дала бы одинаковые выражения в разных системах координат, т. е. была бы *инвариантной* по отношению к выбору системы координат. Такой инвариантной формой записи уравнений является векторная форма, т. е. *уравнения физики как векторные равенства справедливы для любой системы координат.* Векторная форма записи уравнений широко применяется как в механике, так и в других разделах физики. В качестве примеров инвариантной формы записи можно привести векторные формулы, определяющие скорость (1.7), ускорение (1.10) и др. В то же время соответствующие формулы в проекциях при различном выборе систем координат различны.

Кроме *инвариантности уравнений* — сохранения формы записи их в разных системах координат, существует *инвариантность величин* — сохранение одного и того же значения в разных системах

координат. Например, модуль вектора является инвариантом любого преобразования координат, а проекции вектора различны в разных системах.

Инвариантность уравнений и инвариантность физических величин связана не только с выбором той или иной математической системы координат, но также и с преобразованиями системы координат, возможными благодаря свойствам пространства, рассмотренным выше[1]. Так, изотропность пространства позволяет повернуть на произвольный угол систему координат как целое вокруг любой оси, проходящей через начало координат. Это не влечет за собой изменения физических явлений, происходящих в системе. Таким образом, физические законы должны быть инвариантны относительно *пространственных поворотов* системы координат, что также заложено в векторной форме их записи. (В то же время проекции векторов зависят от положений осей системы — достаточно вспомнить преобразование координат точки при повороте осей в геометрии.)

Физические величины делятся на *векторные* — проекции их преобразуются при поворотах и переходах от одной системы к другой — и *скалярные* — значения их одинаковы в разных системах и при поворотах системы не меняются. Примером векторной величины служат радиус-вектор точки, скорость, ускорение и т. д. Модули всех этих величин — инварианты или скаляры преобразования координат. Из курса общей физики известно много других скалярных величин: масса, электрический заряд, температура и др.

Кроме *поворота*, возможен *сдвиг* системы координат как целого вместе с началом системы и осями. В силу однородности пространства такой сдвиг (или трансляция) даст физически равноправные системы. Но математически сдвиг для координат всех точек выражается равенством

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{a}, \tag{4.1}$$

где $\vec{a}$ — вектор трансляции. Инвариантность физических формул по отношению к трансляции означает, что в них радиус-векторы точек пространства непосредственно входить не могут. Так, например, сила, действующая на материальную точку, определяется взаимными расстояниями между взаимодействующими точками; эти расстояния к сдвигам инвариантны, инвариантна и сила. Инвариантны также к сдвигам в пространстве скорость материальной точки и многие другие векторные и скалярные величины, характеризующие физическое состояние системы.

Обратимся к однородности времени. Равноправие всех моментов времени означает возможность произвольного выбора начала его отсчета, сдвигов или *временных трансляций*, не влияющих физически на систему отсчета и явления в ней.

На протяжении курса будет выяснено, что симметрии простран-

[1] Сохранение формы уравнения называется ковариантностью уравнения, а сохранение величины — инвариантностью величины. Но часто термин *инвариантность* употребляют и для величин, и для уравнений.

ства и времеин (одиородность и изотропиость) связаны с законами сохранення важиейшнх физическнх величнн, характеризующих физическую систему,— эиергин, нмпульса, момента импульса.

Позиакомимся еще с однннм преобразоваиием снстемы координат. Это в отлнчие от рассмотренных выше иепрерывиых преобразований (повороты и сдвигн могут быть бесконечио малымн) днскретиые преобразовання пространствеииой *инверсии* и *отражения времени:*

$$x \to x' = -x,\ y \to y' = -y,\ z \to z' = -z,\ t \to t' = -t. \quad (4.2)$$

Пространствеиная нниверсия, как вндио из рнсунка 4.1, эквнвалентна зеркальному отражению (с последующим поворотом вокруг оси $Oz$ иа угол $\pi$).

Естественным является предположеиие, что снстемы отсчета $Oxyz$ н $O'x'y'z'$ (отражеииая) физическн равноправны, т. е. уравиення в иих сохраняют форму прн ниверсии осей. Векторные н скаляриые уравиеиия механики действнтельио обладают этим свойством. Однако это не обязательно для любого уравиения; вообще говоря, скаляры н векторы при инверсин могут измеияться. По отношеиию к ниверсии скаляры делятся иа *истинные* скаляры (нлн просто скаляры) и *псевдоскаляры*. Истнннный скаляр прн иивереснн осей не нзменяется, т. е. удовлетворяет следующему условию:

$$\varphi(x,\ y,\ z) \to \varphi(x',\ y',\ z') = \varphi(-x,\ -y,\ -z). \quad (4.3)$$

Псевдоскаляр при ниверсин меняет знак:

$$\psi(x,\ y,\ z) \to \psi(x',\ y',\ z') = -\psi(-x,\ -y,\ -z). \quad (4.4)$$

Векторы по отношеиию к нниверсин делятся иа *истинные (полярные)* и *псевдовекторы (аксиальные)*. Истнннный вектор отражается при инверсин вместе с отраженнем осей коорднннат, что вндио на примере раднус-вектора точкн пространства. Для его проекцнй на основаиии формулы (4.2) нмеем:

$$r_x = -r_{x'},$$
$$r_y = -r_{y'},$$
$$r_z = -r_{z'}.$$

Любой истиниый вектор при образовании иивереснн меняет знакн всех проекций на противоположиые:

$$a_x(x,\ y,\ z) = -a_{x'}(-x,\ -y,\ -z) \text{ н т. д.} \quad (4.5)$$

Что касается псевдовектора, то он прн отражеиии пространства ие отражается вместе с осями. Так, еслн рассмотреть векторное произведение двух нстиииых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, лежащнх в плоскостн $Oxy$, и пронзвести инверсню, то нз рисунка 4.2 видио, что орнеитация вектора измеиилась в системе на протнвоположную, т. е. для псевдовекторов справедливы следующне условия для проекций:

$$\omega_x(x,\ y,\ z) = \omega_{x'}(-x,\ -y,\ -z) \text{ н т. д.} \quad (4.6)$$

Физическне величины выражаются как нстиииыми скалярами и векторами, так н псевдоскалярами н псевдовекторами. Такие вели-

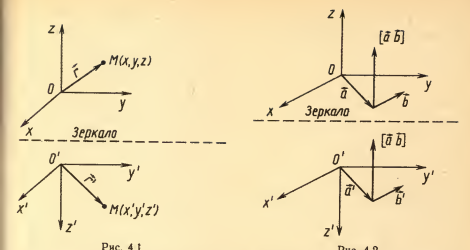


Рис. 4.1.

Рис. 4.2.

чины, как скорость, ускорение, сила, являются истинными векторами, в то время как угловая скорость и угловое ускорение — псевдовекторы. Часто встречающиеся в механике скаляры — модули векторов — являются истинными. Истинные скаляры — масса, электрический заряд, количество теплоты и т. д. В качестве примера псевдоскаляра приведем скалярное произведение истинного и псевдовектора:

$$(\vec{\omega}\,\vec{r}) = \omega_x x + \omega_y y + \omega_z z.$$

В соответствии с формулами (4.2) и (4.6) $(\vec{\omega}\,\vec{r}) = -(\vec{\omega}'\vec{r}')$.

Деление величин на векторы и псевдовекторы, скаляры и псевдоскаляры отражает некоторые дополнительные свойства физических объектов, особенно характерные в микромире. В классической же механике это деление менее существенно. Заметим только, что любое векторное или скалярное равенство слева и справа может содержать в качестве слагаемых только величины одного и того же смысла по отношению к инверсии: истинные скаляры или псевдоскаляры, векторы или псевдовекторы.

Обратимся, наконец, к отражению времени — преобразованию $t \to t' = -t$. Его не удается интерпретировать как переход к системе отсчета с обратным ходом времени, так как подобных систем в природе не обнаружено — ход времени однонаправлен. Преобразование связывают либо с применением уравнений механики к расчету положений материальной точки в пространстве в прошедшие моменты времени, либо (в микромире) с процессами, обратными данным по начальным и конечным условиям.

Векторы, начальная точка которых определена физическими условиями и жестко фиксирована, называются *приложенными* (например, вектор силы, действующей на материальную точку). Если точка приложения вектора находится где угодно на линии вектора, то это вектор *скользящий* (например, сила, действующая на твердое тело). Если началом вектора служит любая точка пространства, то это *свободный* вектор например, радиус-вектор.

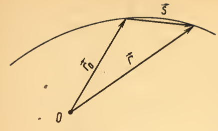



Рис. 4.3.

## Методические замечания к главе.

В школьном курсе физики кинематика излагается в настоящее время в векторной форме. Основное упрощение, которое здесь делают, состоит в том, что понятие радиус-вектора как функции времени, т. е. кинематическое уравнение в общем виде, не рассматривается. Вместо радиус-вектора вводят вектор перемещения $\vec{s}$, соединяющий начальное положение движущейся точки с положением ее в некоторый момент времени $t$. Связь вектора перемещения и радиус-вектора видна из рисунка 4.3, откуда следует, что $\vec{s} = \vec{r} - \vec{r}_0$; и далее $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{s}}{dt}$, т. е. скорость движения точки может быть определена через вектор перемещения.

Надо со всей определенностью подчеркнуть, что нет никакого смысла применять векторную форму записи кинематического уравнения в частных случаях движения, так как для любого конкретного движения исчерпывающими являются формулы в проекциях или в естественной форме. В современных школьных учебниках это обстоятельство не учитывается. Пишутся, например, векторные уравнения для одномерного движения.

В кинематике вводится понятие о сложном движении точки. Смысл понятия сложного движения тесно связан с относительным характером движения: сложное движение по определению состоит из заданного движения точки в некоторой движущейся системе и движения этой системы в неподвижной. Однако в курсах физики часто говорится о том, что тело (или материальная точка) участвует в нескольких движениях, в связи с чем формально складывают или разлагают на составляющие векторы скорости и ускорения.

И в школьном курсе физический смысл сложения и разложения скоростей и ускорений, как правило, не выясняется: дело сводится к формальной математической операции сложения и разложения векторов. Между тем выражения типа «тело участвует в нескольких движениях», «имеет составляющие скорости» и т. д. без выяснения сути дела неясны, так как по определению у тела в заданной системе *одно* движение, *одна* скорость, *одно* ускорение.

Выяснение соответствующего круга вопросов — важная и трудная методическая задача, разрешаемая с помощью понятия об относительном характере механического движения, т. е. с помощью неподвижной и движущейся систем координат.

# ГЛАВА II. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Если до сих пор мы изучали различные движения тел как заданные или происходящие, рассматривали без выяснений условий, при которых осуществляется то или другое движение, то теперь наша задача состоит именно в выяснении причин, побудивших тело двигаться равномерно, ускоренно (по прямолинейной или криволинейной траектории) и т. д. Раздел механики, в котором изучаются причины движения, называется *динамикой*. В отличие от кинематики, где движение описывается только с помощью координат, скоростей и ускорений, в динамике вводятся и другие величины, характеризующие взаимодействие тел: сила, масса, энергия и т. д. Именно эти величины определяют характер движения. В динамике рассматриваются основные законы механического движения, с помощью которых появляется возможность предсказывать

характер движения в тех или иных условиях, рассчитывать теоретически кинематические параметры, создавать необходимые движения, управлять механическими процессами. Поэтому с физической точки зрения динамика гораздо содержательнее кинематики.

## § 5. Основные понятия и законы динамики

**5.1. Инерциальные системы отсчета и первый закон Ньютона.** Понятие об *инерциальной* системе отсчета известно из курса общей физики. Инерциальной является система, в которой соблюдается закон инерции: *изолированная материальная точка, т. е. не взаимодействующая с какими-либо материальными объектами, находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.* Так как закон инерции выполняется не во всех системах, то формулировку его дают и по-другому: *в природе существуют системы отсчета, в которых изолированная материальная точка находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения. Такие системы называются инерциальными.*

Закон инерции называют также первым законом Ньютона. Но при этом следует иметь в виду, что сам Ньютон дал несколько иную формулировку первого закона (см. § 5.3).

Из формулировки закона следует, что в инерциальных системах невзаимодействующее с чем-либо тело движется без ускорения. Что же касается тел, подверженных взаимодействию, то они могут двигаться ускоренно. Каждое ускорение обусловлено взаимодействием данного тела с другими телами, действием на него других тел.

Понятие инерциальной системы является идеализацией, так как в реальных системах не каждое ускорение движения материальной точки удается отнести к взаимодействиям с другими телами. Например, если ускорение свободного падения на Земле $g = 980$ см/с$^2$ относят к притяжению тел Землей, то изменение этого ускорения от экватора к полюсу, имеющее порядок 1 см/с$^2$, одним изменением притяжения в зависимости от широты места на Земле не объясняется, оно связано и с вращением Земли. Возможность замены той или иной реальной системы моделью — инерциальной системой определяется величиной изучаемых взаимодействий и степенью точности измерений.

Так, система отсчета, связанная с Землей, не является инерциальной: в ней имеет место ускорение, обусловленное вращением Земли, а не действием других тел на рассматриваемое движущееся тело. Однако если это ускорение мало по сравнению с ускорениями, вызванными взаимодействием с телами, то Землю принимают за инерциальную систему. С высокой степенью точности инерциальной является другая реальная система отсчета — гелиоцентрическая; центр ее следует совместить с центром Солнца, а оси той или иной системы координат направить на отдаленные (неподвижные) звезды. В этой системе изучается взаимное движение Солнца и планет, космических кораблей и станций.

**5.2. Сила и масса.** Основным понятием, отражающим в механике физические условия, в которых находится материальная точка, является понятие *силы*. Материальная точка в реальных системах тел не является изолированной, она взаимодействует с другими телами, другими материальными точками. Взаимодействия могут быть разными по своей физической природе, но влияние на движение материальной точки любых взаимодействий одинаково — материальная точка получает ускорение движения. Поэтому оказывается возможным, не вникая в природу взаимодействий, охарактеризовать их механический эффект, вводя физическую величину — силу $\vec{F}$.

Рассмотрим систему двух материальных точек, взаимодействующих между собой. В результате взаимодействия точки движутся с ускорениями. Если фиксировать внимание на изменении скорости одной точки, то можно увидеть, что ускорение ее вызвано действием другой. Это действие и характеризуется силой. Поскольку в данном случае единственный механический эффект (проявление силы) состоит в ускорении, то количественную характеристику силы можно установить по величине вызываемого ею ускорения, постулируя зависимость между силой и ускорением: *сила, действующая на материальную точку, пропорциональна придаваемому точке ускорению:*

$$\vec{F} = k_1\vec{a}, \tag{5.1}$$

где $k_1$ — коэффициент пропорциональности.

Выбирая теперь некоторое тело в качестве эталона, используемого для измерения силы, и выбирая некоторую силу в качестве единичной, устанавливаем, измеряя вызванное ускорение, величину и размерность $k_1$:

$$k_1 = \frac{1\ \text{ед. силы}}{a}, \quad [k_1] = \frac{[F]}{[a]}.$$

Далее, располагая эталонным телом с известным $k_1$, измеряем с помощью формулы (5.1) любые силы.

Правомерность введения постулата (5.1) подтверждается прямыми экспериментами. Располагая значениями сил, измеренными с помощью одного избранного тела, можно убедиться, что сила пропорциональна ускорению для любого тела (разным телам соответствуют различные коэффициенты $k_1$).

Механический эффект физических взаимодействий может быть и другим — тела при взаимодействии с другими телами получают деформации. Величина наблюдаемой деформации упругого тела-эталона, находящегося в равновесии, также может служить мерой для силы. Силу считают пропорциональной абсолютному удлинению при упругой деформации и направленной по направлению вектора удлинения:

$$\vec{F} = k_2\Delta\vec{l}. \tag{5.2}$$

Выбирая некоторое упругое тело (пружину) за эталонное и выбирая некоторую силу в качестве единичной, устанавливаем значение $k_2$ и его размерность:

$$k_2 = \frac{1 \text{ ед. силы}}{\Delta l}, \; [k_2] = \frac{[F]}{[L]}.$$

После этого оказывается возможным измерить любую силу с помощью данного упругого эталона по формуле (5.2). Единицы силы здесь будут иными, нежели при измерении по (5.1).

При измерении сил через ускорения опираются на динамическое проявление силы, а когда измеряют силу по деформации — на статическое. Любым из указанных способов можно установить векторный характер силы и выбрать единицы измерения.

Объективный характер закономерностей (5.1) и (5.2) подтверждается также следующим важным обстоятельством: если силу измерять с помощью (5.1), то (5.2) выступает как эмпирический закон, и наоборот.

Итак, *сила есть векторная физическая величина, характеризующая действие на тело других тел, в результате чего тело получает ускорение или деформируется.*

Векторный характер силы тесно связан с правилами сложения нескольких сил, одновременно действующих на тело, т. е. с заменой нескольких сил одной, вызывающей то же физическое действие, что и несколько исходных. Эти правила являются обобщением опыта и подтверждают, что сила — вектор, так как силы складываются как геометрические векторы. (Более подробное обсуждение сложения сил нам удобно провести несколько позже.)

Зная способы измерения ускорения и силы, устанавливаем, что величины ускорений, получаемые разными материальными точками под действием одной и той же силы, различны. Свойство тел — материальных точек — по-разному реагировать на действие одной и той же силы называется *инертностью.* Мерой инертности материальной точки является ее *масса* $m$. Определим инертную массу, *постулируя* зависимость ускорения при некоторой выбранной силе $\vec{F}$ от массы $m$:

$$\vec{a} = k\frac{\vec{F}}{m}. \quad (5.3)$$

Для двух тел, испытывающих действие одной и той же силы, получим:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2}. \quad (5.4)$$

*Массы материальных точек обратно пропорциональны модулям ускорений, получаемых точками под действием одной и той же силы.*

Выбирая эталон массы, с помощью формулы (5.4) оказывается возможным измерять массу тел. Полагая в (5.4) $m_1 = 1$ ед. массы, получаем:

$$m_2 = 1 \text{ ед. массы} \cdot \frac{a_1}{a_2}.$$

В правомерности постулированной зависимости (5.3) убеждает распространение ее на любые силы; при определении массы фиксировалась некоторая постоянная сила, опыт же показывает, что при действии любой другой силы на тела с измеренной ранее массой обратная пропорциональность ускорения и массы выполняется. Соотношение (5.4) поэтому справедливо для любой силы. Таков первый способ измерения массы — сравнение ускорений. Измеренная этим способом масса носит название *инертной*.

Существует и *второй способ* измерения массы — взвешивание тел. Здесь сравнение массы тела с массой эталонов — гирь — производится путем сравнения сил притяжения тел к Земле. По существу измеряется не инертная масса, а другая величина — *тяжелая масса*. Однако равенство инертной и тяжелой масс (при одном и том же выборе единиц) в настоящее время экспериментально установлено с высокой степенью точности.

Экспериментальные сведения о массе тел, которые получены в различных разделах физики, позволяют сделать заключение, что масса — величина скалярная (истинный скаляр), всегда положительная, обладает свойством аддитивности. Для изолированной системы справедлив закон сохранения ее полной массы.

На аддитивности и сохранении массы в классической механике остановимся особо. Постоянство массы при действии силы на тело означает ее независимость от скорости движения тела и является экспериментальным фактом, использованным при определении массы в формулах (5.3) и (5.4). Закон сохранения *полной массы* изолированной системы как *суммы масс* входящих в нее тел является для классической механики утверждением тривиальным; в механических процессах тела сохраняют свою индивидуальность, не испытывают каких-либо превращений, связанных с изменением массы. Но и в классической механике можно рассматривать механическое соединение двух (или нескольких) тел в одно, разделение одного тела на несколько частей. Например, два тела можно стянуть болтами, склеить, тело можно распилить на части и т. д. Во всех этих случаях выполняется свойство аддитивности массы: масса целого равна сумме масс частей. Это утверждение имеет самостоятельное значение и является обобщением опыта. Но аддитивность массы приблизительна и справедлива только для классической области движений и взаимодействий, т. е. когда рассматриваются макроскопические части тела и $v \ll c$.

В заключение вернемся к зависимости (5.3). Эта зависимость между величинами $\vec{F}$, $m$ и $\vec{a}$ является одним из важнейших законов природы и носит название второго закона Ньютона. Далее в курсе проводится его анализ.

**5.3. Законы Ньютона.** Основные принципы классической механики были сформулированы И. Ньютоном (1643—1727) в знаменитом сочинении «Математические начала натуральной философии» в 1687 г. В честь его творца классическую механику часто именуют ньютоновой механикой, а основные принципы механики известны под названием законов Ньютона. Приведем формулировки законов, данные самим Ньютоном, в переводе академика А. Н. Крылова.

Закон I

*Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние.*

Закон II

*Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.*

Закон III

*Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе взаимодействия двух тел друг с другом равны и направлены в противоположные стороны.*

Первый закон обсуждался нами выше, когда рассматривали инерциальные системы отсчета.

Второй закон является стержнем всей механики. Поскольку количество движения, по Ньютону, есть произведение массы тела на его скорость, т. е. $m\vec{v}$, то математическая формулировка закона выражается формулой:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = k\vec{F}. \qquad (5.5)$$

В области нерелятивистских скоростей масса тела является величиной постоянной, не зависящей от скорости, поэтому из выражения (5.5) имеем:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = k\vec{F},$$

или

$$\vec{a} = k\frac{\vec{F}}{m}. \qquad (5.6)$$

Формулировку второго закона Ньютона в настоящее время часто дают в соответствии с (5.6).

Ускорение движения материальной точки совпадает по направлению с приложенной к ней силой; по модулю прямо пропорционально модулю силы и обратно пропорционально массе материальной точки.

Если все величины взять в международной системе единиц, то второй закон Ньютона выразится векторным равенством

$$m\vec{a} = \vec{F}. \qquad (5.7)$$

Формула (5.7) может рассматриваться также в качестве динамического определения силы и служит для выбора ее единицы измерения — ньютона: $1\text{Н} = 1\text{кг}\cdot\text{м/с}^2$.

В связи с этим часто поднимается вопрос о сути второго закона: является ли он отражением объективно существующей в природе зависимости между величинами или только определением силы? Но такое противопоставление неправомерно потому, что введение какого-либо определения в физике, не опирающегося на объективную закономерность, ничего не дает.

Смысл второго закона и его фундаментальное для всей классической механики значение состоит в том, что силу и массу можно определить независимо друг от друга, т. е. определить силу, дей-

ствующую на тело, не зная его массы, и определить массу, не измеряя силы. В таком случае возникает возможность рассчитать ускорение, сообщаемое телу данной силой. Возможно решение и другой задачи: измеряя ускорение кинематически и определяя массу (независимо от силы), вычисляют силу. Те и другие расчеты имеют практическое значение потому, что как сила, так и масса тел отражают реальные свойства взаимодействия тел, а между силой, массой и ускорением объективно существует зависимость.

В первом и втором законах говорится о теле, считающемся материальной точкой: в первом законе оно изолировано от всех остальных тел, а во втором — рассматривается действие на него другого тела без анализа последствий этого действия для другого тела. В третьем законе Ньютона рассматриваются два тела, моделируемые материальными точками. Точки на расстоянии взаимодействуют между собой, т. е. действуют друг на друга с некоторыми силами. Третий закон Ньютона, или закон равенства действия и противодействия, устанавливает характер взаимодействия материальных точек. Удобна и следующая формулировка третьего закона, в которой использованы введенные ранее понятия материальной точки и силы: *силы, с которыми две материальные точки действуют друг на друга, расположены по прямой, соединяющей точки, равны по модулю и противоположны по направлению.*

Эти силы являются центральными. Для центральной силы линия силы всегда проходит через некоторую точку — центр, в котором помещается источник силы — действующая точка.

Обозначая вектор силы, с которой точка $M_1$ действует на точку $M_2$, через $\vec{F}_{1,2}$, а силы, с которой точка $M_2$ действует на точку $M_1$, через $\vec{F}_{2,1}$, по третьему закону Ньютона имеем:

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1} \qquad (5.8)$$

(точки и векторы сил взаимодействия изображены на рис. 5.1).

На практике часто имеют дело с системой взаимодействующих между собой материальных точек, число которых больше двух. Возникает вопрос: каковы законы совместного действия нескольких точек на рассматриваемую? Ответ на этот вопрос дает прин-

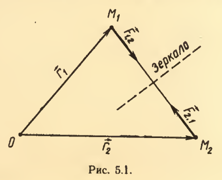



Рис. 5.1.

цип независимости действия сил, или *принцип суперпозиции сил*, который является необходимым дополнением законов Ньютона: *ускорение, получаемое материальной точкой при одновременном действии на нее нескольких сил, равно геометрической сумме ускорений, получаемых точкой при действии каждой из этих сил в отдельности.*

Из принципа суперпозиции следует, что *равнодействующая* сила, т. е. сила, заменяющая действие нескольких сил, приложенных к точке, равна геометрической сумме векторов этих сил. Пусть к материальной точке приложены силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$. По второму закону они сообщают точке ускорения:

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_1}{m}, \ \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_2}{m}, \ \dots, \ \vec{a}_n = \frac{\vec{F}_n}{m}.$$

Результирующее ускорение в соответствии с принципом суперпозиции при совместном действии сил

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n = \frac{1}{m}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n).$$

Отсюда следует, что равнодействующая сила $\vec{F} = \vec{a}m$ определяется формулой

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i. \tag{5.9}$$

Таким образом, векторный характер силы подтверждается этим выводом из принципа суперпозиции. Важно отметить, что принцип суперпозиции сил является обобщением опытных данных.

**5.4*. Связь первого и третьего законов Ньютона со свойствами пространства и времени.** В первом законе говорится о невзаимодействующей с чем-либо материальной точке, т. е. по существу о единственной материальной точке во всем пространстве. Рассмотрим два положения ее: в точке $x_1$, $y_1$, $z_1$ в момент времени $t_1$ и в точке $x_2$, $y_2$, $z_2$ в момент времени $t_2$. В силу однородности пространства и времени переход материальной точки из одного положения в другое не может изменить какую-либо физическую характеристику ее, в частности скорость. Отсюда следует, что для такой материальной точки единственно возможным является движение с постоянной скоростью $\vec{v}$ (в том числе $\vec{v} = 0$, т. е. покой). Легко видеть, что движение с постоянным ускорением невозможно, так как при нем будет изменяться скорость, что в силу однородности пространства и времени запрещено. Изотропия пространства приводит к тому, что при движении по инерции возможно любое направление скорости. Итак, закон инерции связан с однородностью и изотропностью пространства и с однородностью времени.

Обсудим третий закон. Рассмотрим систему, состоящую из двух материальных точек. Поскольку пространство и время однородны, то силы, с которыми взаимодействуют точки, не могут зависеть от координаты точки пространства и момента времени. Но может

иметь место зависимость силы от расстояния между точками, т. е. $F_{1,2} = F(r_{1,2})$, причем направление $\vec{F}_{1,2}$ может быть только совпадающим или противоположным $\vec{r}_{1,2}$, так как никакие другие направления в силу изотропности в пространстве не выделены. Но это и отражено в третьем законе в утверждении о направлении сил. Таким образом, центральный характер взаимодействия между парами точек обусловлен свойствами пространства.

Силы взаимодействия могут зависеть еще от масс точек $m_1$ и $m_2$. Если точки поменялись местами, физическое состояние системы, а значит и взаимодействие точек, не изменится благодаря зеркальной симметрии пространства (см. рис. 5.1). Единственная возможность сохранения картины сил при отражении — выполнение равенства: $\vec{F}_{1,2} = \vec{F}_{2,1}$. Это — вторая часть формулировки третьего закона.

Таким образом, третий закон Ньютона связан с однородностью, изотропностью и зеркальной симметрией пространства. Кроме того, он связан с механической моделью мгновенной передачи взаимодействия между точками системы: силы равны лишь при условии, что второе тело мгновенно реагирует на изменение расстояния до первого, т. е. взаимодействие передается с бесконечно большой скоростью.

**5.5. Механическая концепция взаимодействия и силы в механике.** Изучение природы сил не входит в содержание механики и выполняется в других разделах физики. По данному вопросу можно высказать только самые общие соображения, вытекающие из модели материальных объектов и модели взаимодействия между ними, принятых в механике и составляющих основу механической концепции. Сведем сейчас воедино сведения, уже приводившиеся ранее по этому вопросу, т. е. изложим механическую концепцию движения и взаимодействия.

Исходной для механики является система материальных точек в пустоте, связанных взаимодействием, мгновенно передающимся от одной точки к другой, т. е. дальнодействием. Силы взаимодействия, возникающие между двумя точками в любой их паре, имеют центральный характер и подчиняются третьему закону Ньютона.

Под действием сил возможен единственный механический эффект в системе: движение ее точек с ускорениями, определяемыми формулой второго закона Ньютона.

Перейдем от взаимодействия между парами точек к понятию силового поля. Рассмотрим равнодействующую сил, действующих на некоторую точку в системе со стороны всех остальных. Так как каждая из составляющих сил зависит от расстояний рассматриваемой точки до других точек, а эти расстояния — от положения рассматриваемой точки в пространстве, то величина равнодействующей будет функцией координат материальной точки, т. е. $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$.

Если рассматривать теперь одну движущуюся точку, испытывающую на себе действие сил со стороны других движущихся точек, то очевидно, что силы окажутся зависящими от времени, так как положение других точек изменяется, т. е. вектор силы в общем случае может быть функцией координат и времени:

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t). \qquad (5.10)$$

Таким образом, рассматривая равнодействующую системы сил, действующих на отдельную точку, мы приходим к понятию *силового поля — это пространство, в каждой точке которого на движущуюся или неподвижную материальную точку действует сила, зависящая от координат точки и момента времени.* В данном случае понятие силового поля полностью согласуется с механической моделью материальных объектов и концепцией дальнодействия, дополняя их удобной математической формой описания взаимодействия: вместо подробного рассмотрения всех попарных взаимодействий достаточно знать или задать силовое поле. Но это поле не материальный объект, заполняющий пространство и входящий в механическую систему, а вспомогательное математическое понятие. В механике считают, что взаимодействуют точки через пустоту, без помощи какого-либо переносчика взаимодействия.

В реальной действительности рассмотренная механическая концепция прежде всего охватывает *гравитационные взаимодействия:* с высокой степенью точности сила взаимного притяжения двух материальных точек обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена по линии, соединяющей точки. Формула (5.10) в общем виде выражает силу, действующую на материальную точку в гравитационном поле.

Кроме гравитационных, в природе широко распространены *электромагнитные взаимодействия.* Чтобы материальные точки участвовали в них, необходимо снабдить точки электрическими зарядами, так что материальная точка будет характеризоваться двумя скалярными величинами — массой $m$ и зарядом $q$. Опыт показывает, что электромагнитные силы зависят от скорости движения точки. В рамках механической концепции силы взаимодействия двух точек могут зависеть, кроме расстояния между ними, еще от модуля относительной скорости их движения, т. е. $\vec{F}_{1,2} = \vec{F}(r_{1,2}, v_{1,2})$.

Благодаря изотропности пространства эта сила может быть направлена только по линии, соединяющей точки. Силы взаимодействия зависят от зарядов $q_1$ и $q_2$.

Сменим места частиц, отразив систему в зеркале (см. рис. 5.1). Зеркальная симметрия силовой картины возможна только при условии: $\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$.

Третий закон Ньютона для сил, зависящих от относительной скорости, справедлив.

Рассмотрим равнодействующую сил, действующих в этом случае на некоторую точку в системе со стороны остальных точек. Так как каждая из составляющих сил зависит от относительной скорости, а эта скорость — от скорости движения точки в пространстве,

то величина равнодействующей будет функцией вектора скорости рассматриваемой точки (при неподвижных остальных): $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v})$.

Если учесть движение остальных точек, то окончательно формула приобретает вид:

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t). \tag{5.11}$$

Формула (5.11) дает общий вид зависимости механической силы, действующей на материальную точку, от ее положения в пространстве, скорости и времени.

К механическим силам относят также силы *упругости, трения и сопротивления среды,* действующие на макроскопические тела. По своей природе это электромагнитные силы, обусловленные взаимодействиями между заряженными микрочастицами, входящими в состав макроскопических тел. Они возникают при соприкосновении тел. Поэтому силы упругости, трения, сопротивления среды называют контактными. Задача о подробном рассмотрении взаимодействия в сложнейшей системе микрочастиц в механике не ставится. Вместо этого рассматривается и эмпирически определяется суммарный макроскопический эффект — упругая сила, сила трения, сила сопротивления вязкой среды движению тела. Последняя сила оказывается зависящей от скорости. Подчеркнем, что для двух тел, взаимодействующих посредством контактных сил, третий закон Ньютона справедлив.

Подводя итог, можем констатировать, что в самом общем случае сила (равнодействующая всех сил), приложенная к материальной точке, есть векторная функция радиус-вектора точки, ее скорости и времени.

В соответствии с формулой (5.11) проекции силы на оси прямоугольной декартовой системы координат будут функциями координат точки, проекций ее скорости и времени:

$$\begin{cases} F_x = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \\ F_y = F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \\ F_z = F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t). \end{cases} \tag{5.12}$$

Вид этих функций должен определиться или на основании экспериментов, или на основании дополнительных физических гипотез и теорий. В механике же функциональная зависимость силы от координат, скорости и времени предполагается известной, если решается задача о нахождении ускорения тела под действием силы.

**5.6. Полевая концепция взаимодействия и ее связь с механической.** Если в рамки механической концепции укладываются основные известные нам проявления гравитационных взаимодействий, то электромагнитные взаимодействия описываются ею лишь в частных случаях. Что касается *сильных* и *слабых* взаимодействий, то они не соответствуют механической концепции в главном: для них полностью исключается применение модели дальнодействия.

Механическая концепция не может претендовать на охват всего материального мира, т. е. не может быть положена в основу его физической картины. Особенно существенный пробел в механической концепции — отсутствие в системе наряду с материальными телами материальных полей, взаимодействующих с телами. Поля

передают взаимодействие между точками системы с высокой, но не бесконечной скоростью $c$, действуя на точку там, где она находится в поле. Такое взаимодействие и называют *близкодействием*.

Не анализируя природу, свойства и происхождение поля, рассмотрим, к каким изменениям представлений о взаимодействии приводит включение поля в механическую систему материальных точек.

Поле непрерывно заполняет пространство. Основное его механическое действие заключается в том, чтобы дать ускорение материальным точкам, помещенным в поле, это силовое действие. Примером силы, действующей на заряженную материальную точку в поле, являются сила тяжести и сила Лоренца. Для сил, действующих в физических полях на материальные точки, справедлив второй закон Ньютона, если движение точки существенно не изменяет параметры поля, и точкой моделируется макроскопическое тело.

Рассмотрим две взаимодействующие через поле материальные точки. Первая точка создает поле, а вторая — испытывает на себе его действие. Взаимодействие передается с конечной скоростью, так что сила, действующая на вторую точку со стороны первой в момент времени $t$, определяется положением (и скоростью) первой точки в предыдущий момент времени $t-\tau$, т. е. с учетом времени на передачу взаимодействия, так называемого времени запаздывания $\tau=\frac{r}{c}$. Это и нарушает равенство действия и противодействия; третий закон Ньютона не выполняется. Особенно наглядно объясняется нарушение, если использовать закон сохранения импульса (см. § 9).

В чистом виде основная механическая модель материальных объектов — система точек — и взаимодействие между ними — дальнодействие — может применяться тогда, когда материальное поле, передающее взаимодействие, можно не учитывать, заменяя его силовым. Это правомерно, если временем запаздывания можно пренебречь. А последнее возможно, если скорости движения точек $v << c$. В таком случае точка не успеет за время распространения взаимодействия сместиться, и такой случай сводится к мгновенному взаимодействию. Кроме того, поле должно изменяться сравнительно медленно, так, чтобы на протяжении времени запаздывания оно могло считаться стационарным. Для этого также нужны условия нерелятивистского движения: $v << c$.

Движение макроскопических тел с нерелятивистскими скоростями осуществляется в сравнительно слабых и медленно изменяющихся полях — электромагнитном и гравитационном; это движение изучается в механике без применения понятия материального поля.

Рассмотрим выход, связанный со свойствами микрочастиц, за пределы механической концепции взаимодействия. В механике материальная точка, как подчеркивалось ранее, заменяет собой макроскопическое тело или его макроскопическую часть. В этом случае оказывается возможным применение бесструктурной модели — точки, не обладающей какими-либо *направленными в пространстве параметрами.*

Когда же мы имеем дело с микрочастицами, то такие параметры неизбежно появляются, например векторы спинов. Из рисунка 5.2 видно, что осевая симметрия задачи о двух взаимодействующих точках, обладающих векторным параметром $\vec{S}$, нарушена, т. е. силы взаимодействия в принципе могут зависеть от взаимных направлений векторов $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$, $\vec{r}_{1,2}$ и могут быть направлены под углом к $\vec{r}_{1,2}$. Иными словами, могут существовать нецентральные силы.

Считается, например, что нецентральная составляющая имеется у сил взаимодействия между нуклонами в ядре.

Нецентральные силы, хотя и удовлетворяют равенству $F_{1,2}=F_{2,1}$, не подчиняются третьему закону Ньютона, так как не лежат на прямой, соединяющей взаимодействующие частицы. Тем самым они выходят за рамки механической концепции.

Наконец, в микромире при очень малых расстояниях между частицами — порядка $10^{-13}$ см — все взаимодействия приводят не к ускоренным движениям, а либо к взаимным превращениям микрочастиц, либо к образо-

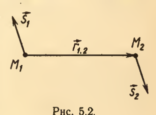


Рис. 5.2.

ванию из них сравнительно устойчивых систем. В этих случаях механическая концепция целиком утрачивает смысл.

**5.7. Принцип относительности Галилея.** Преобразования Галилея (3.11) служат для перехода от некоторой неподвижной инерциальной системы отсчета $Oxyz$ к подвижной $O'x'y'z'$: $\vec{r'} = \vec{r} - \vec{v}_0 t,\ t' = t$.

В частном случае выбора осей имеем формулы (3.12):

$$x' = x - Vt,\ y' = y,\ z' = z,\ t = t'.$$

Отсюда следует преобразование скоростей по формулам (3.13):

$$v'_{x'} = v_x - V,\ v'_{y'} = v_y,\ v'_{z'} = v_z,$$

которое дает возможность заключить, что материальная точка, движущаяся в нештрихованной системе с постоянной скоростью $\vec{v}$, в штрихованной движется также с постоянной скоростью $\vec{v'}$, хотя и иной по величине. Следовательно, закон инерции справедлив и в подвижной, штрихованной, системе, а эта система является инерциальной. Если имеется одна инерциальная система, то все остальные, движущиеся в ней равномерно, прямолинейно, поступательно, также инерциальны.

Важные свойства однородности и изотропности пространства и однородности времени постулированы в § 1 для некоторой инерциальной системы отсчета. В силу линейности преобразований Галилея эти и другие названные ранее свойства справедливы для пространства и времени в любой инерциальной системе. Все инерциальные системы поэтому геометрически эквивалентны.

Оказывается, что инерциальные системы эквивалентны и физически. Механическая эквивалентность систем отражена в *принципе относительности Галилея.* В классической механике постулируется, что *все инерциальные системы отсчета эквивалентны для механических взаимодействий.* Другими словами, принцип относительности состоит в том, что любое механическое явление происходит во всех инерциальных системах по одним и тем же законам, имеющим инвариантную форму. Имеются также неизменные величины — инварианты преобразований Галилея. Они оказываются особенно существенными при изучении движения, так как выражают неизменные во всех системах отсчета свойства тел и движений.

Рассмотрим величины, входящие в формулу (5.7) второго закона Ньютона. В соответствии с преобразованиями Галилея ускорение — величина инвариантная, как это следует из равенства $\vec{a} = \vec{a'}$. По принципу относительности система материальных точек находится в одинаковых механических условиях в любой инерциальной системе отсчета, т. е. сила, действующая на материальную точку, должна быть инвариантом преобразований Галилея. Это видно непосредственно из преобразований, если учесть, что согласно механической концепции взаимодействия сила определяется в данный момент времени расстояниями от рассматриваемой точки до других точек и относительными скоростями взаимодействующих точек. Так как эти величины

инвариантны при преобразованиях координат Галилея, то инвариантна и сила. Например, силы сопротивления среды зависят от относительной скорости тела, движущегося в среде, неизменной во всех инерциальных системах, и поэтому инвариантны. (Что касается электромагнитных сил, действующих на движущиеся с высокой скоростью электрические заряды в электромагнитном поле, то они имеют разную величину в разных системах отсчета, о чем говорится в части II курса.)

В целом по принципу относительности второй закон Ньютона должен быть инвариантен. Для этого необходимо, чтобы масса материальной точки была инвариантной величиной, т. е.

$$m = m'. \tag{5.13}$$

В справедливости этого утверждения убеждает опыт изучения и применения движений с нерелятивистскими скоростями: масса не зависит от скорости движения тела.

Итак, *второй закон Ньютона не только сохраняет свою форму во всех инерциальных системах, но и связывает инвариантные величины.* То же относится и к третьему закону, и к принципу независимого действия сил — они справедливы во всех инерциальных системах.

Утверждая, что любое механическое явление (с точки зрения разных наблюдателей) во всех инерциальных системах протекает одинаково, необходимо иметь в виду именно законы динамики. Кинематические же характеристики движения — скорость, траектория движения, уравнение движения,— как это видно из преобразований Галилея, различны в разных системах.

В связи с существованием множества инерциальных систем естественно поставить вопрос о некоторой исходной системе, которая была бы абсолютно неподвижной, а все остальные двигались бы в ней с определенными скоростями. Такую систему можно назвать *привилегированной.* Очевидно, что с помощью наблюдения механических явлений как-то выделить одну из инерциальных систем нельзя, хотя всегда можно найти скорости движения систем относительно друг друга. Однако Ньютон, по-видимому, думал, что неподвижная система существует и она связана с «абсолютным» пространством. В настоящее время известно, что такое допущение ошибочно, а инерциальные системы физически эквивалентны во всех отношениях, т. е. *привилегированной или абсолютно неподвижной системы нет.* Анализ этого важного положения выполняется ниже, в части II, а сейчас достаточно учитывать, что выбор неподвижной и подвижной систем условен.

## § 6. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

**6.1. Две задачи динамики.** Рассмотрим одну материальную точку, подверженную действию тел или полей. Как было показано в § 5, материальная точка находится в силовом поле, описанном форму-

лами (5.11) или (5.12). Дифференциальное уравнение ее движения в векторной форме согласно равенству (5.7) имеет вид:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t). \tag{6.1}$$

*Это уравнение называется основным уравнением динамики.* В логическом плане оно может рассматриваться как исходное положение — постулат, из которого путем математических преобразований получают как общие следствия и выводы классической механики, так и решения множества ее конкретных задач. Это ядро динамики материальной точки.

Основной постулат динамики в форме дифференциального уравнения проясняет связь между определением силы и вторым законом Ньютона. Его суть в том, что *все механические движения подчиняются уравнению (6.1),* где $m$ — скалярный параметр, характеризующий свойства материальной точки, $\vec{r}$ — радиус-вектор, а $\vec{F}$ — некоторая однозначная, конечная, непрерывная функция координат, скорости и времени. Постулируется именно этот общий вид уравнения. А то, что правую часть называют силой, ничего от объективности закона движения не отнимает. Для применения уравнения (6.1) существенно, что сила может быть определена независимо.

С помощью уравнения (6.1) ставятся и решаются две важнейшие задачи, которые рассмотрим подробнее.

*Первая задача:* задано движение материальной точки с известной массой $m$, т. е. задано кинематическое уравнение движения (1.2):

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

Требуется определить силу, приложенную к точке.

Пусть движение точки задано уравнениями в декартовых координатах, т. е. формулами (1.2): $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Рассматривая основное уравнение (6.1) также в декартовых координатах, имеем:

$$m\ddot{x} = F_x, \; m\ddot{y} = F_y, \; m\ddot{z} = F_z. \tag{6.2}$$

Дифференцируя (1.2) по времени дважды и подставляя $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ — проекции ускорения в (6.2), получаем некоторые функциональные зависимости для всех проекций силы:

$$F_x = F_x(t), \; F_y = F_y(t), \; F_z = F_z(t).$$

С помощью решения первой задачи может быть найдено силовое поле (5.12), в котором движется материальная точка. В каждый момент времени сила $\vec{F}$ вычисляется по формулам (6.3), но из кинематических уравнений (1.2) известно и положение точки в пространстве. Следовательно, можно в принципе определить значение силы в различных точках пространства, найти зависимость силы от координат.

*Первая задача* оказывается относительно простой, она требует применения методов только дифференциального исчисления и всегда имеет решение.

*Вторая задача:* известно силовое поле, в котором движется материальная точка. Требуется определить движение точки.

Пусть сила как функция координат, скорости и времени задана в декартовых координатах в виде (5.12). Тогда искомыми будут

координаты $x$, $y$, $z$ движущейся материальной точки как функции времени. Проецируя основное уравнение (6.1) на оси декартовых координат и используя известные функции (5.12) для силы, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \\ m\ddot{y} = F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \\ m\ddot{x} = F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t). \end{cases} \qquad (6.3)$$

Неизвестные координаты точки $x, y, z$ как функции времени входят в эти уравнения вместе со своими первыми и вторыми производными по времени. Для решения задачи требуется решить систему дифференциальных уравнений (6.3), называемых ньютоновыми дифференциальными уравнениями движения, и найти неизвестные функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Проекции силы могут быть заданы не обязательно в декартовых координатах. Для этой цели может быть использована любая подходящая система координат. Например, в полярных координатах на плоскости должны быть указаны проекции вектора силы на направление радиус-вектора и на перпендикулярное ему направление как функции полярных координат точки, ее скорости в полярных координатах и времени. Для получения дифференциальных уравнений движения в полярных координатах основное уравнение динамики (6.1) нужно спроецировать на направления полярных осей, приняв во внимание известные выражения (1.18) для проекций ускорения. Имеем:

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}, t), \\ m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = F_\varphi(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}, t). \end{cases} \qquad (6.4)$$

Если сила задана в проекциях на оси естественного трехгранника (см. рис. 1.6), то основное уравнение (6.1) проецируется на эти оси и система дифференциальных уравнений движения будет следующей:

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = F_\tau, \\ m\dfrac{v^2}{\rho} = F_n, \\ 0 = F_b. \end{cases} \qquad (6.5)$$

Для того чтобы написать дифференциальные уравнения движения, как это видно из приведенных примеров, необходимо знать выражения для проекций ускорения на оси выбранной системы координат. Существует общий метод, позволяющий единообразно находить дифференциальные уравнения движения в произвольной криволинейной системе координат. Он рассматривается ниже, в главе VI.

**6.2. Особенности общего решения второй задачи динамики материальной точки.** Вторая задача динамики приводит к сложной математической проблеме интегрирования системы дифференциальных уравнений и часто представляет больший интерес для практики, нежели первая. Основное содержание динамики точки и состоит

в разработке методов решения второй задачи. В этом параграфе обсуждается общее решение этой задачи.

Изучение способов решения системы дифференциальных уравнений входит в курс математического анализа. Порядок каждого дифференциального уравнения в системе определяется порядком наивысшей производной, входящей в уравнение. При движении *свободной* точки порядок каждого из трех уравнений равен двум. В конкретных случаях уравнения интегрируются различными способами, но общее решение системы имеет вид:

$$\begin{aligned} x &= x(t,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_6), \\ y &= y(t,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_6), \\ z &= z(t,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_6). \end{aligned} \tag{6.6}$$

Здесь $x,\ y,\ z$ — найденные, т. е. известные, функции указанных переменных, а $C_1,\ C_2,\ \ldots\ C_6$ — произвольные постоянные.

В простейших случаях переменные в дифференциальных уравнениях (6.3) разделяются и процесс решения сводится к последовательному взятию двух неопределенных интегралов (квадратурам).

Поэтому общее решение иногда называется *интегралом уравнений,* хотя в общем случае решение к квадратурам не сводится.

Наличие произвольных постоянных в общем интеграле показывает, что он представляет не конкретное движение, а дает кинематические *уравнения целого непрерывного семейства движений с одинаковыми ускорениями.*

Отсюда следует, что задание силы еще не определяет однозначно движения материальной точки. Под действием одной и той же силы материальная точка может совершать любые движения из семейства, описанного формулами (6.6). Для того чтобы вторая задача имела определенное решение, необходимо указать добавочные условия, называемые *начальными.*

Начальные условия указывают для некоторого момента времени, обычно $t = 0$; это положение точки и вектор ее скорости (откуда и с какой скоростью начинает двигаться точка). Аналитически начальные условия записываются следующими равенствами (при решении задачи в декартовых координатах):

$$\begin{cases} x|_{t=0} = x_0,\ y|_{t=0} = y_0,\ z|_{t=0} = z_0, \\ \dot{x}|_{t=0} = \dot{x}_0,\ \dot{y}|_{t=0} = \dot{y}_0,\ \dot{z}|_{t=0} = \dot{z}_0. \end{cases} \tag{6.7}$$

Наличие начальных условий позволяет найти единственное движение, удовлетворяющее поставленным требованиям, для чего необходимо только выразить шесть произвольных постоянных в общем интеграле через начальные координаты и скорости точки, указанные в равенствах (6.7). Заметим, что значения координат в общем решении справедливы для любого момента времени, в том числе и для момента $t = 0$. Положив в системе (6.6) $t = 0$ и приняв во внимание первую группу начальных условий, можем написать следующие три

алгебраических уравнения, которым должны удовлетворять произвольные постоянные:

$$\begin{cases} x_0 = x_0\,(0,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_6), \\ y_0 = y_0\,(0,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_6), \\ z_0 = z_0\,(0,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_6). \end{cases} \tag{6.8}$$

Для составления недостающих трех уравнений возьмем производные по времени в обеих частях равенств (6.6):

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x}\,(t,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_6), \\ \dot{y} = \dot{y}\,(t,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_6), \\ \dot{z} = \dot{z}\,(t,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_6). \end{cases} \tag{6.9}$$

В полученных уравнениях $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ суть известные функции указанных аргументов. Уравнения определяют проекции скорости в любой момент времени. Выписывая их для момента времени $t = 0$ и принимая во внимание начальные условия (6.7), получаем три новых независимых уравнения для определения произвольных постоянных:

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = \dot{x}_0\,(0,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_6), \\ \dot{y}_0 = \dot{y}_0\,(0,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_6), \\ \dot{z}_0 = \dot{z}_0\,(0,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_6). \end{cases} \tag{6.10}$$

В совокупности с уравнениями (6.8) уравнения (6.10) составляют систему из шести независимых уравнений для определения шести неизвестных произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_6$. Система разрешима. Ее решение выражает произвольные постоянные через начальные координаты и скорость точки:

$$\begin{gathered} C_1 = C_1\,(x_0,\ y_0,\ z_0,\ \dot{x}_0,\ \dot{y}_0,\ \dot{z}_0), \\ C_2 = C_2\,(x_0,\ y_0,\ z_0,\ \dot{x}_0,\ \dot{y}_0,\ \dot{z}_0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_6 = C_6\,(x_0,\ y_0,\ z_0,\ \dot{x}_0,\ \dot{y}_0,\ \dot{z}_0). \end{gathered}$$

Подстановка найденных значений произвольных постоянных в общее решение уравнений движения (6.6) дает частное решение системы дифференциальных уравнений движения; это искомые кинематические уравнения движения материальной точки:

$$\begin{gathered} x = f_1(t,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ \dot{x}_0,\ \dot{y}_0,\ \dot{z}_0), \\ y = f_2(t,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ \dot{x}_0,\ \dot{y}_0,\ \dot{z}_0), \\ z = f_3(t,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ \dot{x}_0,\ \dot{y}_0,\ \dot{z}_0). \end{gathered}$$

Таким образом, вторая задача динамики оказывается полностью решенной.

Для пояснения приведенных общих соображений по решению задачи далее рассмотрены примеры, в которых все выкладки доводятся до конца. Но в большинстве случаев дифференциальные уравнения движения не могут быть проинтегрированы и не может быть получено точное решение задачи. Заметим, что для практики это обстоятельство не имеет решающего значения, так как при-

ближенное решение всегда можно получить с требуемой точностью, особенно в век электронно-счетных машин.

Во многих случаях полного решения второй задачи не требуется. Достаточным оказывается установление некоторых отдельных свойств движения точки. В таких случаях решение задачи по приведенной выше схеме нецелесообразно. Вместо полного решения здесь может оказаться достаточным знание некоторых *первых интегралов* движения. В первые интегралы входят еще первые производные по времени от координат, т. е. решение дифференциальных уравнений выполнено не до конца (см. примеры 6.1—6.6). Рассмотрим смысл первых интегралов. Общее решение, выраженное формулами (6.6), и три уравнения (6.9), получающиеся из него в результате дифференцирования по времени, можно рассматривать как систему уравнений относительно шести неизвестных констант $C_1$, $C_2$, ..., $C_6$. Предположим, что ее решили. Решения имеют вид:

$$\begin{aligned} C_1 &= \varphi_1(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \\ C_2 &= \varphi_2(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_6 &= \varphi_6(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t). \end{aligned}$$

Из первых пяти уравнений время $t$ можно исключить, для чего достаточно выразить его через координаты и скорости, пользуясь последним уравнением. Тогда результат можно представить в таком виде:

$$\left\{ \begin{aligned} C_1 &= \psi_1(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ C_2 &= \psi_2(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_6 &= \psi_6(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t). \end{aligned} \right. \tag{6.11}$$

В силу постоянства левых частей равенств функции $\psi_1$, $\psi_2$, ..., $\psi_6$, зависящие от координат движущейся точки, проекций скорости и, вообще говоря, времени, обладают тем свойством, что при движении точки сохраняют свои значения неизменными[1]. Они называются первыми интегралами движения и выражают законы сохранения некоторых величин $C$. Равенства (6.11) показывают, что существует *шесть независимых первых интегралов*. Любая функция первых интегралов также будет (зависимым) интегралом движения. Если все шесть первых интегралов известны, то из них можно (без интегрирования) получить полное решение второй задачи динамики точки. В самом деле, решая уравнения (6.11) относительно $x$, $y$, $z$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, получим кинематические уравнения типа $x = x(C_1, C_2, ..., C_6, t)$, что при заданных $C_1$, $C_2$, ..., $C_6$ дает частные решения, а при произвольных — общий интеграл исходных уравнений.

Знание одного первого интеграла позволяет понизить порядок системы дифференциальных уравнений на единицу и тем самым упростить ее интегрирование.

---

[1] Зависимость от времени останется в одном из первых интегралов, т. е. время в него входит явно.

Знание некоторых интегралов сразу дает ответ на многие частные вопросы задачи. Поэтому важнейшей частью динамики точки является установление признаков существования интегралов и их нахождение.

**6.3. Принцип причинности в классической механике.** Основное уравнение динамики (6.1) и общий анализ его решения, выполненный выше, позволяют рассмотреть причинно-следственные связи при механическом движении. Механическая система состоит из материальных точек, координаты и скорости которых определяются в каждый момент времени в инерциальной системе отсчета. Состояние системы точек в данный момент времени считается заданным, если известны координаты каждой материальной точки и ее скорость в этот момент. Кроме того, должны быть известны массы материальных точек. Разъясним, почему координаты и скорости определяют состояние.

Сила, действующая на каждую точку в системе, определяется в данный момент времени $t$ взаимными положениями всех точек и их относительными скоростями. С помощью второго закона Ньютона мы можем, зная силы, определить мгновенные значения ускорений и, располагая скоростями всех точек, найти положения и скорости их в следующий (бесконечно близкий) момент времени $t + dt$:

$$v_{(t+dt)} = v_t + a_t dt, \quad x_{t+dt} = x_t + v_t dt + \frac{a_t dt^2}{2}.$$

Затем снова определяются силы, ускорения, скорости и положения точек в следующий момент времени и т. д.

Таким образом, *состояние механической системы в некоторый момент времени однозначно предопределяет состояние системы в любой другой момент времени.*

Такая однозначная связь причины и следствия носит название *динамической закономерности*. Классическая механика принадлежит к группе теорий с динамической закономерной связью между причинами и следствиями в механическом движении. Сам же принцип причинности в классической механике состоит в том, что *состояние системы материальных точек однозначно определяется их взаимодействием и начальными условиями.* Все последующие состояния предопределены предыдущими.

Принцип причинности может быть распространен и на систему материальных точек, включающую в себя физическое поле. Если характеристики поля, задающие силу, однозначно определяются положениями и скоростями всех материальных точек системы (замкнутой и изолированной), то проведенные выше рассуждения справедливы и для этого случая.

**6.4*. Обращение хода времени.** Рассмотренное ранее в § 1 свойство однонаправленности времени никак не проявляет себя в механике; основное уравнение динамики инвариантно относительно обращения или отражения времени, математически определяемого подстановкой $\Delta t \to \Delta t' = -\Delta t$. Покажем это.

В простейшем случае чисто механической системы сила, действующая на точку, зависит только от взаимного расстояния между точками, т. е. $\vec{F}(\vec{r})$ — инвариант указанного преобразования. Подробный анализ всех механических сил, в том числе электромагнитных, показывает, что они инварианты при обращении времени. Так как

ускорение точкн определяется второй производной по временн, то оно также инварнант указаниого преобрвзования, что непосредственно вытекает нз выкладкн:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt'^2} = \frac{d}{dt'}\left(\frac{d\vec{r}}{dt'}\right) = \frac{d}{-dt}\left(\frac{d\vec{r}}{-dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Итвк, прн обращеинн временн сохраняются форма основного урввнення днинамикн н входящие в него велнчнны. Это отражено в ннжеследующих формулах: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \to m'\ddot{\vec{r}}' = \vec{F}'$, $m' = m$, $\ddot{\vec{r}}' = \ddot{\vec{r}}$, $\vec{F}' = \vec{F}$.

Очевндно, что ннварнантнымн прн преобразованнн $t = -t$ являются также н первый, н третий законы Ньютонв.

Что же касается скоростн двнжения матернальной точкн, то, пользуясь ее определеннем $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, находнм:

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}}{dt'} = -\frac{d\vec{r}}{dt} = -\vec{v}.$$

Прн обращении временн иаправленне скоростн меняется на обратное.

Сказанное об ннвариантиостн законов мехвннкн прнводнт к выводу об обратимостн механнческнх процессов: еслн осуществляется некоторое движенне, соответствующее прямому (естественному) течению временн, то возможно н обратное двнженне — «двнженне вспять». Прн обрвтном движеннн матернальная точка (снстема) последовательно проходнт все положення в пространстве н прнобретает протнвоположиые по нвправлению зиачення скоростей в обратном порядке.

Проиллюстрнруем обратимость двнжения простым прнмером. Пусть в некоторой снстеме $K$ на материальную точку, находящуюся в состояннн покоя, действует постояниая сила. В таком случае точкв двнжется по осн $Ox$ равноускоренно в соответствнн с равенствамн $v = at$, $x = \frac{at^2}{2}$.

В снстеме $K'$ с обращенным временем, где $\Delta t' = -\Delta t$, снла н ускоренне остаются темн же, а направленне скоростн нзменяется нв обратное.

Пусть в снстеме $K$ к моменту временн $t_0$ матернальная точка достнгла скоростн $v_0$ н находнтся в точке пространства $x_0$. Рассматрнвая ее двнженне в снстеме $K'$ с этого момента временн как начвльного, т. е. $t' = 0$, нмеем:

$$v' = -v_0 + at',$$
$$x' = x_0 - v_0t' + \frac{at'^2}{2}.$$

Это равнозвмедленное двнженне по осн $Ox$ осуществляется вспять. Таблнца, состввленная для $a = 1$, $t_0 = 5$, наглядно показывает, что матернальнвя точка проходит рассмотренные в снстеме $K$ положення в обрвтном порядке.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $K$ | $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| | $v$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| | $x$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 2 | $4\frac{1}{2}$ | 8 | $12\frac{1}{2}$ |
| $K'$ | $t'$ | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| | $v'$ | 0 | −1 | −2 | −3 | −4 | −5 |
| | $x'$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 2 | $4\frac{1}{2}$ | 8 | $12\frac{1}{2}$ |

Однако сделанное в этом параграфе заключение об обратимости механических процессов не может рассматриваться в качестве свидетельства обратимости времени. В природе неизвестны системы отсчета с обратным ходом времени, так что одно и то же движение нельзя «увидеть» в прямом и обратном порядке. Практически обратимость механических движений может быть достигнута за счет разных начальных условий при действии одних и тех же сил, о чем и свидетельствует таблица, если ее данные интерпретировать в одной и той же системе с одним ходом времени.

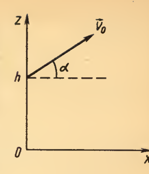



Рис. 6.1.

Пример 6.1. **Решение задачи на движение материальной точки массы $m$ под действием силы тяжести вблизи поверхности Земли.**

Для математического оформления задачи необходимо выбрать систему координат. Хотя в принципиальном отношении выбор координатной системы безразличен, неудачный выбор координат практически может сильно затруднить выкладки и истолкование полученного решения. Необходимо стремиться к тому, чтобы проекции силы на выбранные оси выражались наиболее просто, для чего можно оси ориентировать так, чтобы большее число сил было им либо параллельно, либо перпендикулярно. В данной задаче одну из осей декартовой прямоугольной системы следует направить вертикально вверх, так как сила тяжести направлена по вертикали. Тогда плоскость $Oxy$ расположится на поверхности Земли. Для упрощения записи начальных условий начало координат поместим в точке, лежащей на одной вертикали с точкой, из которой начинает двигаться материальная точка. Ось $Ox$ направим так, чтобы вектор начальной скорости совпадал с плоскостью $Oxz$. Проекции силы на выбранные оси будут $F_x = F_y = 0$, $F_z = -mg$. Ньютоновы дифференциальные уравнения движения (6.2) для нашей задачи имеют вид:

$$m\ddot{x} = 0, \qquad \ddot{x} = 0,$$
$$m\ddot{y} = 0, \qquad \ddot{y} = 0,$$
$$m\ddot{z} = -mg, \qquad \ddot{z} = -g.$$

Тот факт, что масса точки исключается из дифференциальных уравнений, указывает на независимость движения от массы частицы. Это характерная особенность гравитационных взаимодействий.

Начальные условия задаются следующими равенствами:

$$x|_{t=0} = 0, \qquad y|_{t=0} = 0, z|_{t=0} = h,$$
$$\dot{x}|_{t=0} = v_0 \cos\alpha, \qquad \dot{y}|_{t=0} = 0, \dot{z}|_{t=0} = v_0 \sin\alpha. \tag{6.12}$$

Здесь $h$ — высота точки над поверхностью Земли, из которой начинается движение, $v_0$ — начальная скорость, $\alpha$ — угол, образуемый начальной скоростью с горизонтом (рис. 6.1). Первый шаг в решении задачи — ее математическая формулировка — выполнен.

Следующим шагом является решение дифференциальных уравнений движения. В нашем случае решение элементарно и мы выпишем его без пояснений:

$$\dot{x} = C_1, \qquad x = C_1 t + C_2,$$
$$\dot{y} = C_3, \qquad y = C_3 t + C_4,$$
$$\dot{z} = gt + C_5, \qquad z = -\frac{1}{2} gt^2 + C_5 t + C_6.$$

Отсюда видно, что если мы знаем первые интегралы $C_1$, $C_3$, $C_6$, то далее необходимо решить уравнения первого порядка, а если известны и остальные интегралы $C_2$, $C_4$, $C_5$, то решение обходится без интегрирования.

Теперь остается отыскать частное решение, удовлетворяющее начальным условиям. Полагая в решении, что $t = 0$, и используя начальные условия — равенства

(6.12), составляем систему уравнений для нахождения значений произвольных постоянных:

$$v_0\cos\alpha = C_1,\quad 0 = C_3,\quad v_0\sin\alpha = C_5,$$
$$0 = C_2,\quad 0 = C_4,\quad h = C_6.$$

После подстановки найденных решений получаем искомые кинематические уравнения движения точки:

$$x = v_0t\cos\alpha,\ y = 0,\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t\sin\alpha + h.$$

Подстановка в эти решения конкретных числовых значений $h$, $v_0$ и $\alpha$ дает ответ на любую задачу баллистики — науки о бросании тел на Земле.

Пример 6.2. **Решение задач на одномерное движение.**

В частном случае прямолинейного движения материальной точки решение второй задачи значительно проще.

Направив ось по траектории движения, получаем только одно дифференциальное уравнение:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(x,\ \frac{dx}{dt},\ t\right).$$

Начальные условия сводятся к двум равенствам:

$$x|_{t=0} = x_0,\qquad \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = \dot{x}_0.$$

Но и здесь дифференциальное уравнение движения лишь в частных случаях может быть сведено к интегралам.

Рассмотрим примеры.

Пример 6.3. **Одномерное движение под действием постоянной силы.**

Дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m}F = a.$$

Его общий интеграл получается по методу разделения переменных и выражается следующей формулой:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + C_1t + C_2.$$

Движение равноускоренное.

Пример 6.4. **Сила — функция времени.**

Дифференциальное уравнение движения для силы $F_x = F(t)$ имеет вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(t)$$

и простыми приемами доводится до первых и вторых интегралов:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{1}{m}F(t) = a(t),$$

$$\frac{dx}{dt} = \int a(t)dt + C_1 = v(t) + C_1,$$

$$x = \int v(t)dt + C_1t + C_2.$$

Достигнуто решение в виде неопределенных интегралов.

Пример 6.5. **Сила зависит от координаты $x$ точки.**

Дифференциальное уравнение задачи имеет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m}F(x).$$

Делаем подстановку для решения уравнения

$$\frac{dx}{dt}=v,\ \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}$$

и приводим его к виду

$$vdv=\frac{1}{m}F(x)\,dx.$$

Дальнейшее преобразование уравнения понятно без пояснений:

$$\frac{v^2}{2}=\frac{1}{m}\int F(x)dx+C_1=f(x)+C_1,$$

$$v=\frac{dx}{dt}=\sqrt{2\,[f(x)+C_1]}\ ,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2[f(x)+C_1]}}+C_2=t.$$

Решение также достигнуто квадратурами.

Пример 6.6. **Сила зависит от скорости движения точки.**

Вводим подстановку $\dot{x}=v$ и записываем дифференциальное уравнение в виде

$$\dot{v}=\frac{dv}{dx}=\frac{1}{m}F(v).$$

Переменные в уравнении разделяем и производим первое интегрирование:

$$\int\frac{vdv}{F(v)}=\frac{x}{m}+C_1.$$

Берем интеграл и получаем новое уравнение с неизвестной $v$:

$$f(v)=\frac{x}{m}+C_1.$$

Разрешаем полученное уравнение относительно $v$ и возвращаемся к старым обозначениям:

$$\frac{dx}{dt}=\varphi(x_1C_1).$$

Отсюда разделением переменных получаем окончательно общий интеграл уравнения движения:

$$\int\frac{dx}{\varphi(x_1C_1)}+C_2=t.$$

Если уравнение $f(v)=\frac{x}{m}+C_1$ неразрешимо относительно $v$, поступаем иначе. Пишем дифференциальное уравнение движения в виде

$$\frac{dv}{dt}=\frac{1}{m}F(v),$$

интегрируем разделением переменных:

$$\int\frac{dv}{F(v)}=\frac{1}{m}t+C_3.$$

После взятия интеграла получаем уравнение

$$f_1(v)=\frac{t}{m}+C_3.$$

Исключая из найденных двух уравнений $v$, находим уравнение, связывающее координату $x$ и время $t$. И в этом случае общее решение уравнения движения получено.

Пример 6.7. **Использование первого интеграла.**

Для одномерного движения материальной точки известен первый интеграл: $E = \frac{m\dot{x}^2}{2}$. В таком случае

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

и задача свелась к уравнению первого порядка. Его решение находится методом разделения переменных:

$$x = \sqrt{\frac{2E}{m}}\,t + C.$$

Пример 6.8. **Использование двух первых интегралов движения.**

Для свободно падающей материальной точки располагаем двумя первыми интегралами:

$$E = \frac{m\dot{z}^2}{2} + mgz,\ g = \frac{\dot{z}}{t},$$

где $z$ — координата по вертикальной оси с началом на поверхности Земли.

Подставляя $\dot{z}$ из второго уравнения в первое, получаем:

$$E = \frac{mg^2t^2}{2} + mgz,$$

откуда и следует кинематическое уравнение

$$z = \frac{E}{mg} - \frac{gt^2}{2}.$$

Решение поставленной задачи достигнуто без применения интегрирования.

**Методические замечания к материалу § 6.** Изучение законов Ньютона в средней школе составляет основу курса механики и во многом определяет другие разделы. Возможность изучения основного уравнения динамики без использования дифференциального исчисления обеспечена трактовкой уравнения $\vec{F} = m\vec{a}$ как алгебраического, из которого можно найти $\vec{a}$ (для частного случая постоянной силы). Однако при изучении второго закона возникают серьезные методические трудности, связанные с динамическим определением силы. От школьников обычно ускользают тонкости в логических рассуждениях, отличающие объективное содержание закона от такого же по форме определения силы. Путь преодоления указанных трудностей состоит в независимом измерении сил по их статическому действию и в последующем выводе о пропорциональности ускорения силе, выполняемом с опорой на опыты. Динамическое же определение силы и единицы силы можно ввести после изучения второго закона. То же относится и к массе тела, и к третьему закону Ньютона. Допустимо для разграничения третьего закона и определения массы измерять массу взвешиванием, а с определением массы через ускорение познакомиться после изучения третьего закона.

Правомерность такого подхода обусловлена объективным законом природы — эквивалентностью тяжелой и инертной массы любого тела.

В школьном курсе игнорируется принцип суперпозиции сил. Вместо него фигурирует рассуждение: поскольку сила — величина векторная, то силы складываются геометрически. Но векторный характер сил при их динамическом определении вытекает только из принципа суперпозиции. Поэтому вопросу о сложении сил следует уделить особое внимание, тем более что статика как самостоятельный раздел в настоящее время в школе не изучается и представления о векторном характере сил у учащихся не сформированы.

## § 7. Движение несвободной материальной точки

**7.1. Понятне связей.** Прн аиализе поиятия механической силы был рассмотрен случай, в котором действие иа матернальную точку всех остальиых точек системы опнсаио как снла, являющаяся функцией координат, скоростн н времеии. В этом случае точку принято иазывать *свободной.* Одиако при практическом примеиеиин уравиеиия двнжения (6.1) часто встречаются снстемы, в которых, кроме изучаемой движущейся матернальной точки, нмеются движущиеся нлн неподвижные тела конечных размеров, участвующие во взаимодействин. В принцнпе нх действие на рассматриваемую точку также сводится к силам, возникающнм прн соприкосиовении,— это снлы упругости, трения. Но задать нх заранее до решения задачи о двнжении точки практически иевозможно. Проще рассмотреть те очевндиые ограиичеиня, которые накладывают указаииые тела на двнжеиие точки, иа ее траекторию, скорость.

Материальная точка иазывается *несвободной,* еслн ее движение ограиичено какими-лнбо дополнительными условиями; уравиеиия, выражающне этн условня, иазываются *уравнениями связей,* илн просто связями. Матернальио связн осуществляются при помощи различных направляющнх: рельсов, нитей, стержней н т. д. Независнмо от конкретного устройства связи последняя позволяет точке перемещаться по некоторой поверхностн нлн линии, а в самом общем случае иалагает ограинчеиия на скорость движеиия точки.

В механнке не учитывают коиструктнвиые особеииости связей и классифнцнруют нх по виду аналитических выражеиий, которымн оии задаются. Геометрически уравиення связей представляют уравнеиия поверхностей нли областей простраиства, ограннчеиных иекоторымн поверхиостямн. Поверхиость, как нзвестио из геометрии, задается уравиеинем

$$f(x,\ y,\ z) = 0. \tag{7.1}$$

Еслн связь задана этнм уравиеннем, то это означает, что точка может двигаться только по поверхностн. Такая связь называется *удерживающей.*

Если же связь задана равенством-иеравеиством $f(x,\ y,\ z) \leqslant 0$, то матернальная точка может двигаться в областн пространства, ограиичениой указаиной в (7.1) поверхиостью. В этом случае связь называется *неудерживающей.* Например, твердый стержень длиной $l$ закреплеи одним концом в начале коордннат при помощи шарового шарнира, а на втором конце нмеет рассматрнваемую нами движущуюся точку. Движенне последней будет ограничено удерживающей связью $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$.

Если твердый стержень заменнть гибкой ннтью, движение точки будет ограничеио неудержнвающей связью $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant l^2$, запрещающей точке выходить только за пределы сферы радиусом $l$.

Далее в курсе иеудерживающие связи мы не рассматрнваем. Даднм класснфикацию удерживающих связей. (Оиа распространяется и на иеудержнвающне.)

Наиболее простыми связями являются *голономные*. Это связи, задаваемые алгебраическими уравнениями (7.1) или дифференциальными уравнениями, которые после интегрирования сводятся к тем же уравнениям (7.1). В свою очередь голономные связи подразделяются на *стационарные* и *нестационарные*. Уравнением (7.1) задана голономная стационарная связь; в уравнении время в явном виде не содержится. Связь осуществляется неподвижной поверхностью, не изменяющей своей формы. Уравнение $f(x, y, z, t) = 0$ задает голономную нестационарную связь и осуществляется движущейся или деформирующейся поверхностью. Как видим, голономные связи зависят только от координат и не зависят от производных координат.

Все остальные связи, уравнения которых задаются дифференциальными неинтегрируемыми уравнениями, называются *неголономными*. Наиболее сложная связь задается уравнением

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \leqslant 0,$$

т. е. является неголономной, нестационарной и неудерживающей. Общий же вид уравнений связи, с которыми мы встретимся далее, таков:

$$f(x, y, z, t) = 0 \tag{7.2}$$

— это *голономные, удерживающие, стационарные* и *нестационарные связи*.

Уравнения связей показывают, что одна из трех координат точки зависит от двух других. Точка при этом имеет только две (из трех для свободной) степени свободы. Наложение двух связей, уравнения которых $f_1(x, y, z, t) = 0$ и $f_2(x, y, z, t) = 0$, оставляет точке только одну степень свободы. Таким образом, наложение каждой связи уменьшает число степеней свободы на единицу.

Связи накладывают ограничения не только на координаты движущейся точки, но и на ее скорость, если даже скорость в уравнение связи не входит. Пусть связь задана уравнением (7.2). Найдем полную производную от функции $f$ уравнения связи:

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dt} + \frac{df}{dt} = 0,$$

или

$$\operatorname{grad} f\,\vec{v} = -\frac{\partial f}{\partial t}. \tag{7.3}$$

Уравнение (7.3) выражает голономную нестационарную связь в дифференциальной форме. Градиент направлен по нормали к поверхности, задаваемой уравнением связи. Видим, что в случае нестационарной связи скорость точки не перпендикулярна вектору градиента. Раскладывая скорость на составляющую по направлению градиента и перпендикулярные к нему составляющие, лежащие в касательной плоскости к поверхности, заключаем, что на модуль последних никаких ограничений связью не накладывается. Ограничению подлежит только составляющая, направленная по градиенту функции связи. Для стационарной связи, выраженной формулой (7.1), вместо (7.3) имеем: $\operatorname{grad} f\,\vec{v} = 0$, и вектор скорости лежит в касательной плоскости — это единственное ограничение, накладываемое на скорость стационарной связью.

Реальная (шероховатая) поверхиость, которая иа движущуюся по ней точку действует с снлой сухого трения, является голоиомной связью. Снла треиия отсутствует, если поверхиость идеальио гладкая. Кроме приведениой выше классифнкацни, отдельно рассматривают так называемые *идеальные* связи; при движенни, ограничеином нмн, работа снл трения равиа нулю, н *неидеальные* связн с иеравиой иулю работой сил трения.

**7.2. Задаииые силы и силы реакции.** Задача о движеиин несвободиой матернальиой точкн по сравнению со свободной вндоизменяется следующим образом: двнжение точкн ограничено связямн н иа нее (вне зависимостн от связей) действуют нзвестиые силы, оии называются *заданными силами*. Требуется отыскать кинематнческие уравиення двнжения. По своей прнроде, как уже об этом говорилось, действие связей своднтся к снлам, приложеиным к движущейся точке. Поэтому при нзвестных уравиеннях связи оказывается возможным подобрать такую добавочную к задаиным силу, которая влияет иа движение точкн так же, как н связь. Это положеиие иосит название *принципа освобождаемости от связей*. Добавочиые силы, заменяющие связи, иазываются *реакциями связей*. Физнческн реакцни связей имеют однпаковую прнроду с обычными снламн.

Еслн связь заменить соответствующей силой реакции, точка может рассматрнваться как свободиая н для нее будет справедлнво основиое уравнеине днпамнкн (6.1):

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R}. \tag{7.4}$$

В уравиенне в правую часть добавлен вектор силы реакции связн $\vec{R}$. Выделеине снлы реакцни в виде отдельного слагаемого в уравиении (7.4) вызваио двумя прнчннами. Во-первых, в отличие от заданиых сил, обозначеиных в осиовном уравиеиин вектором $\vec{F}$, снла реакцнн связн, как правнло, заранее неизвестна. Ее велнчнну н направлеине можно в общем случае установнть только после решення второй задачи диеамики, т. е. когда будет известно двнжение иесвободной точкн. Во-вторых, снлы реакцнн связей по велнчние н направлению в существеииых чертах определяются заданнымн силами, возинкают только при движенин и действнн заданиых сил.

Еслн заданных сил иет н точка покоится, то наложеине связей не может сообщнть ей ускореине. Таким образом, снлы реакцни связей являются *пассивными силами;* оин действуют прн налнчнн двнжения нли заданных снл, в протнвиом случае не существуют. Заданные снлы можно по этой же прнчнне назвать *активными.*

Познакомнмся с самымн общнми свойствами снл реакции.

Еслн точка прн наложенной связн двнжется по задаиной неподвижной поверхностн, то снлу реакции всегда можно разложить на две составляющне; первая $\vec{T}$ иаправлена по касательной к траектории; оиа иазывается *силой трения,* вторая $\vec{N}$ — по иормали к поверх-

ности, называется *нормальной реакцией*. Итак,

$$\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}.$$

Сила трения $\vec{T}$ всегда направлена противоположно скорости движения точки.

По закону Кулона для сухого трения сила трения пропорциональна нормальной реакции:

$$\vec{T} = -kN\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}. \tag{7.5}$$

Коэффициент пропорциональности $k$ называется коэффициентом трения.

Пример 7.1. **Составление дифференциальных уравнений несвободной точки по заданной поверхности в декартовых координатах.**

Пусть уравнение связи имеет вид:

$$f(x,\ y,\ z) = 0, \tag{7.6}$$

т. е. связь является стационарной.

Для получения дифференциальных уравнений движения основное векторное уравнение (7.4) запишем подробнее:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N} - kN\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}. \tag{7.7}$$

Его нужно проецировать на оси выбранной системы координат.

Так как вектор нормальной составляющей силы реакции связи $\vec{N}$ направлен по нормали к поверхности, то ее проекции на оси координат $N_x$, $N_y$ и $N_z$ находятся умножением модуля на косинусы углов, которые образует градиент с осями координат. Обозначая единичный вектор нормали к поверхности $\vec{\lambda}$, имеем:

$$\cos(\widehat{\vec{\lambda}\,\vec{i}}) = \frac{1}{|\operatorname{grad} f|}\,\frac{\partial f}{\partial x},$$

$$\cos(\widehat{\vec{\lambda}\,\vec{j}}) = \frac{1}{|\operatorname{grad} f|}\,\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\cos(\widehat{\vec{\lambda}\,\vec{k}}) = \frac{1}{|\operatorname{grad} f|}\,\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Приняв во внимание эти формулы, можем сразу написать дифференциальные уравнения движения:

$$m\ddot{x} = F_x + \frac{N}{|\operatorname{grad} f|}\,\frac{\partial f}{\partial x} - kN\frac{\dot{x}}{v},$$

$$m\ddot{y} = F_y + \frac{N}{|\operatorname{grad} f|}\,\frac{\partial f}{\partial y} - kN\frac{\dot{y}}{v},$$

$$m\ddot{z} = F_z + \frac{N}{|\operatorname{grad} f|}\,\frac{\partial f}{\partial z} - kN\frac{\dot{z}}{v}.$$

Эти дифференциальные уравнения существенно упрощаются в случае идеальных связей, для которых касательная составляющая силы реакции (сила трения) равна нулю: уравнения не содержат последних членов.

Пример 7.2. **Составление дифференциальных уравнений движения материальной точки по заданной поверхности в проекциях на касательную к траектории, нормаль к поверхности и перпендикуляр к ним.**

На рисунке 7.1 три названных в заголовке примера направления, принимаемые за оси координатной системы, представлены для точки $M$ на траектории единичными векторами $\vec{\tau}$, $\vec{\lambda}$ и $\vec{\beta}$. Через $\vec{n}$ обозначен единичный вектор главной нормали к траектории, он расположен в плоскости $\vec{\lambda}$ и $\vec{\beta}$. При проецировании основного уравнения (7.7) на указанные оси примем во внимание, что вектор ускорения может быть представлен разложением на составляющие по направлениям касательной к траектории и главной нормали по формуле 1.19:

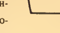


Рис. 7.1.

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}.$$

Основное векторное уравнение несвободной материальной точки при естественном способе описания движения имеет вид:

$$m\left(\frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}\right) = \vec{F} + \vec{N} - kN\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}. \tag{7.8}$$

Проецируя последнее уравнение на рассматриваемые оси, получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau - kN\frac{v}{|\vec{v}|},$$

$$m\frac{v^2}{\rho}\cos(\widehat{\vec{n}\,\vec{\lambda}}) = F_\lambda + N,$$

$$m\frac{v^2}{\rho}\sin(\widehat{\vec{n}\,\vec{\lambda}}) = F_\beta.$$

Для движения по идеально гладкой поверхности (идеальная связь) уравнения упрощаются до вида

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau,$$

$$m\frac{v^2}{\rho}\cos(\widehat{\vec{n}\,\vec{\lambda}}) = F_\lambda + N,$$

$$m\frac{v^2}{\rho}\sin(\widehat{\vec{n}\,\vec{\lambda}}) = F_\beta.$$

Первое уравнение совсем не содержит силы реакции и определяет закон движения точки по траектории. Второе уравнение определяет силу реакции (ее проекцию на направление нормали к поверхности). Сила давления $\vec{D}$, оказываемого точкой на поверхность по третьему закону Ньютона, равна нормальной реакции, а по направлению противоположна ей: $\vec{D} = -\vec{N}$. Второе уравнение позволяет рассчитать модуль силы давления:

$$D = F_\lambda - m\frac{v^2}{\rho}\cos(\widehat{\vec{n}\,\vec{\lambda}}).$$

$F_\lambda$ определяет здесь силу статического давления, второе слагаемое — добавочную силу динамического давления, обусловленную движением точки.

Пример 7.3. **Составление дифференциальных уравнений движения материальной точки по заданной кривой в декартовых координатах.**

Теперь координаты точки должны удовлетворять двум уравнениям связи:

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0,$$

представляющим кривую как линию пересечения двух поверхностей $f_1$ и $f_2$. Пусть первая поверхность действует на точку с силой нормальной реакции $\vec{N}_1$, а вторая — $\vec{N}_2$. Тогда полная реакция равна их сумме: $\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2$. Она и определяет силу трения. Основное уравнение примет вид:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 - kN\frac{\vec{v}}{v}.$$

Проецируя последнее равенство на оси координат, получим дифференциальные уравнения движения в проекциях:

$$m\ddot{x} = X + \frac{N_1}{|\operatorname{grad} f_1|}\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{N_2}{|\operatorname{grad} f_2|}\frac{\partial f_2}{\partial x} - kN\frac{\dot{x}}{v},$$

$$m\ddot{y} = Y + \frac{N_1}{|\operatorname{grad} f_1|}\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{N_2}{|\operatorname{grad} f_2|}\frac{\partial f_2}{\partial y} - kN\frac{\dot{y}}{v},$$

$$m\ddot{z} = Z + \frac{N_1}{|\operatorname{grad} f_1|}\frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{N_2}{|\operatorname{grad} f_2|}\frac{\partial f_2}{dz} - kN\frac{\dot{z}}{v}.$$

При идеальных связях уравнения упрощаются, так как проекции силы трения (последние члены уравнений) обращаются в нули. Остаются только проекции заданных сил и нормальных составляющих сил реакций связей.

Пример 7.4. **Составление естественных дифференциальных уравнений движения материальной точки по заданной кривой.**

Проецируем уравнение (7.8) на оси естественного трехгранника $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ и $\vec{b}$. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = F_\tau - kN\dfrac{v}{|\vec{v}|}, \\ m\dfrac{v^2}{\rho} = F_n + N_n, \\ 0 = F_b + N_b. \end{cases} \tag{7.9}$$

Если кривая идеально гладкая, то в первом дифференциальном уравнении последнее слагаемое (проекция силы трения) обращается в нуль.

Первое уравнение не содержит силы нормальной реакции и определяет закон движения точки по кривой. Два других уравнения позволяют вычислить величину силы нормальной реакции и ее направление в нормальной плоскости.

В целом, рассматривая движение несвободной точки, имеем дело со *смешанной* задачей динамики: по заданным силам и уравнениям связей определяем кинематические характеристики движения, а затем и силы реакции связей.

**Методические замечания к § 7.** Задачи на движение тел со связями типичны для школьного курса физики. Это задачи на движение транспортных средств на поворотах, мостах, на движение по наклонной плоскости, вращательное движение и т. д. Хотя о связи в школьной версии решения этих задач ничего не говорится, схема их решения аналогична рассмотренной нами выше. Рассмотрим примеры таких задач.

1. Тело массой $m$ из состояния покоя скатывается с наклонной плоскости длиной $l$ и высотой $h$ при коэффициенте трения $k$. Найти ускорение тела и силу давления его на плоскость.

Выбирая ось $Ox$ вдоль наклонной плоскости, по формуле (7.7) имеем согласно рисунку 7.2:

$$m\ddot{x} = mg\frac{h}{l} - kN\frac{\dot{x}}{v}, \tag{a}$$

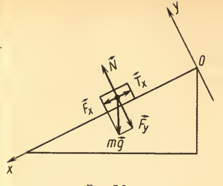



Рис. 7.2.

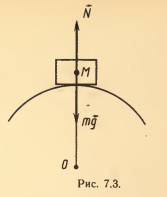



Рис. 7.3.

$$m\ddot{y} = F_y + N - kN\frac{\dot{y}}{v}\,(б),\quad 0 = -kN\frac{\dot{z}}{v}. \qquad (в)$$

Учет связи приводит к тому, что $\ddot{y} = 0$, $\dot{y} = 0$, откуда из (б)

$$N = |F_y| = mg\frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l}.$$

Используя начальные условия, получаем $\dot{z} = 0$, и уравнение (в) удовлетворяется тождественно. Уравнение (а) с учетом $\dot{x} = v$ и найденного значения $N$ позволяет вычислить ускорение

$$\ddot{x} = g\frac{h}{l} - kg\frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l}$$

и затем написать кинематическое уравнение движения.

При решении этой задачи в школе фактически используется естественный метод, хотя об этом и не говорится. Рассматривается ускорение движения вдоль наклонной плоскости и пишется уравнение

$$ma = mg\frac{h}{l} - kN.$$

Оно совпадает с первым из уравнений системы (7.9). Второе уравнение получается из условия равновесия точки относительно оси, перпендикулярной плоскости:

$$N - mg\frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l} = 0.$$

2. Автомобиль идет по выпуклому мосту радиуса $R$ со скоростью $v$. Найти силу давления автомобиля на середину моста.

В соответствии с уравнениями (7.9) записываем:

$$ma = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{mv^2}{R} = mg - N, \qquad (2)$$

откуда

$$N = mg - \frac{mv^2}{R},$$

а сила давления на мост по третьему закону Ньютона равна по модулю $\vec{N}$ и противоположна по направлению. В школьной практике составляется только второе уравнение (2) по рисунку 7.3: центростремительное ускорение автомобилю придает равнодействующая сил тяжести и реакции моста.

## § 8. Движение материальной точки в неинерциальных системах отсчета

**8.1. Силы инерции.** Основное уравнение динамики точки в форме (5.5), (5.7), (6.1) записано в инерциальных системах отсчета. Однако на практике чаще встречаются *неинерциальные системы,* в большей или меньшей мере отличающиеся от инерциальных. Так, система, связанная с Землей, является неинерциальной, и считать ее приближенно инерциальной можно не для любой задачи. Наряду с инерциальными приходится пользоваться и неинерциальными системами отсчета, так как в некоторых случаях их использование оказывается удобным. Например, находясь на Земле и рассматривая движение и равновесие тел относительно Земли, удобнее учесть неинерциальность Земли, нежели пользоваться инерциальной гелиоцентрической системой отсчета, в которой Земля движется довольно сложно.

В общем случае система отсчета может быть связана с телом, движущимся произвольно в некоторой инерциальной системе отсчета. Для преобразования координат, скоростей и ускорений при переходе от нештрихованной инерциальной к штрихованной неинерциальной системе нужно пользоваться формулами для сложного движения точки: (3.1), (3.2), (3.5), (3.6) — и важными в данном вопросе формулами преобразования ускорений: (3.8), (3.9), (3.10).

Исходной для дальнейших рассуждений является формула сложения ускорений (3.10):

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{п} + \vec{a}_{к}, \qquad (8.1)$$

где $\vec{a}$ — ускорение материальной точки в неподвижной, нештрихованной, системе, $\vec{a}'$ — ее ускорение в движущейся, штрихованной, системе, $\vec{a}_{п}$ — переносное ускорение, $\vec{a}_{к}$ — кориолисово ускорение.

Пусть нештрихованная система является инерциальной. Тогда в ней справедлив второй закон Ньютона. Если подставить значения ускорения в основное уравнение механики (6.1), то получим:

$$m\vec{a}' + m\vec{a}_{п} + m\vec{a}_{к} = \vec{F}. \qquad (8.2)$$

Это уравнение используют в подвижной неинерциальной системе, для чего ему придают форму, подобную второму закону Ньютона:

$$m\vec{a}' = \vec{F} + (-m\vec{a}_{п}) + (-m\vec{a}_{к}). \qquad (8.3)$$

Здесь сила выражает действие на материальную точку других тел и полей и может быть указана, как и ранее, в виде функции координат, скорости, времени: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$. Движение же неинерциальной системы проявилось в уравнении через дополнительные слагаемые $m\vec{a}_{п}$ и $m\vec{a}_{к}$. Эти слагаемые кинематически в штрихованной системе обнаружены быть не могут. С помощью линейки и часов не могут быть измерены ускорения $\vec{a}_{от}$ и $\vec{a}_{к}$, измеряется только $\vec{a}'$. Эти слагаемые интерпретируются так же, как и первое слагаемое: как силы, приложенные к точке, вызывающие ускорение, входящее в $\vec{a}'$.

Таким образом, если сохранить для неинерциальной системы отсчета формулу второго закона Ньютона: произведение массы на (наблюдаемое) ускорение равно силе, то $-ma_п$ и $-ma_к$ в (8.3) следует рассматривать как *особого рода силы*. Эти силы называют *силами инерции*. Понятно, что особенность сил инерции состоит в том, что они не являются результатом действия каких-либо материальных тел или полей на рассматриваемую точку, а являются прямым результатом неинерциальности системы отсчета.

Введем обозначение для сил инерции:

$$\vec{I}_п = -m\vec{a}_п \tag{8.4}$$

называют *переносной силой инерции*,

$$\vec{I}_к = -m\vec{a}_к = -2m[\vec{\omega}\,\vec{v}_{от}] \tag{8.5}$$

называют *кориолисовой силой инерции*. В данных обозначениях основное уравнение относительного движения имеет вид:

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{R} + \vec{I}_п + \vec{I}_к; \tag{8.6}$$

здесь учтены силы реакции $\vec{R}$ для несвободной материальной точки.

Если движение неинерциальной системы в некоторой инерциальной известно, то дифференциальные уравнения движения материальной точки в ней (8.6) составить легко. Обе силы инерции определяются по формулам (8.4) и (8.5). На практике отнесение движения к неинерциальной системе в ряде случаев позволяет значительно упростить решение второй задачи динамики.

Если материальная точка находится в покое по отношению к инерциальной системе, то $v_{от} = 0$, $a' = 0$, $a_к = 0$. Уравнение относительного равновесия точки будет иметь вид:

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{I}_п = 0. \tag{8.7}$$

Такое уравнение следует применить к любому покоящемуся на Земле телу, чтобы определить силу реакции, зная заданную силу и учитывая силу инерции.

**8.2. Основное уравнение относительного движения.** Напишем основное векторное уравнение (8.6) динамики движения в неинерциальной системе отсчета более подробно.

Когда переносное движение представляет совокупность одного поступательного и одного вращательного движения, переносная сила инерции состоит из трех составляющих, как это видно из формулы (3.8). Если переносных движений много, их всегда можно свести к указанным двум. Рассмотрим составляющие переносной силы инерции, подставляя в формулу (8.4) выражение переносного ускорения (3.8):

$$I_п = -m\ddot{\vec{r}}_0 - m[\dot{\vec{\omega}}\,\vec{r}'] - m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\,\vec{r}']]. \tag{8.8}$$

Видим, что переносная сила инерции складывается из переносной *поступательной*, переносной *вращательной* и переносной *центростремительной* составляющих.

Кориолисова сила инерции определяется выражением (8.5). Та-

ким образом, основное векторное уравнение динамики относительного движения материальной точки (8.6) в подробной записи будет иметь вид:

$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} + \vec{N} + kN\frac{\vec{v}}{v} - m\ddot{\vec{r}}_0 - m[\dot{\vec{\omega}}\,\vec{r}'] - \\ - m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\,\vec{r}']] - 2m[\vec{\omega}\,\dot{\vec{r}}'] . \qquad (8.9)$$

Рассмотрим движение материальной точки относительно вращающейся вокруг неподвижной точки системы отсчета. Из (8.9) исчезнет член $m\ddot{\vec{r}}_0$. Для свободной точки уравнение примет вид:

$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} - m[\dot{\vec{\omega}}\,\vec{r}'] - m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\,\vec{r}']] - 2m[\vec{\omega}\,\dot{\vec{r}}']. \qquad (8.10)$$

При равномерном вращении системы переносная вращательная сила инерции, содержащая угловое ускорение, обратится в нуль и уравнение (8.10) упростится:

$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} - m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\,\vec{r}']] - 2m[\vec{\omega}\,\dot{\vec{r}}']. \qquad (8.11)$$

Наконец, если материальная точка в штрихованной системе покоится, то

$$\vec{F} + \vec{R} = m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\,\vec{r}']]. \qquad (8.12)$$

Уравнения (8.10—8.12) представляют важные для приложений частные случаи уравнения (8.9).

Пример 8.1. **Равиовесие материальной точки относительио поверхиости Земли.** Земля совершает сложное движение в гелиоцентрической системе. Это движение состоит из суточиого вращеиия Земли с малой угловой скоростью $\omega \approx 7{,}3 \cdot 10^{-5}$ с$^{-1}$ и годового вращения вокруг Солица с угловой скоростью, меиьшей еще в 365 раз. В иерциальиой гелиоцеитрической системе точка иа поверхиости Земли за счет суточиого вращеиия обладает переиосиым ускореиием, которое иетрудио иайти. А зиая это ускореиие, можио решать задачу иа определеиие силы реакции Земли и веса тела, пользуясь геоцентрической иеииерциальиой системой, в которой необходимо учитывать силу иинерции.

Рассмотрим равновесие точки иа поверхиости Земли, учитывая только ее суточиое вращение (так как угловая скорость годичиого вращеиия мала, его переиосным ускорением преиебрегаем). Земля в первом приближеиии представляет собой шар с радиусом 6370 км. Предполагая массу Земли распределеииой равиомерио по всему объему, силу $\vec{F}$ иьютоиова тяготеиия, приложеииую к материальиой точке, можем считать постояииой по величиие и иаправлеииой к центру Земли (рис. 8.1). Угол $\psi$, образоваииый радиусом, проведеиным к даииой точке иа поверхиости Земли, с плоскостью экватора, иазывается геоцеитрической широтой точки. Точка $M$, участвуя в суточиом вращеиии, движется по окружиости с радиусом $\rho$, определяемым формулой

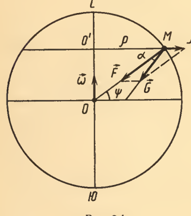


Рис. 8.1.

$\rho = R\cos\psi$. Здесь $R$ — радиус Земли. Переиосное ускорение точки есть центростремительное ускорение при движеиии по окружиости. Модуль переиосной силы ииерции, называемой *центробежной силой,* легко вычисляется:

$$I_ц = m\omega^2\rho = m\omega^2 R\cos\psi.$$

Эта снла иаправлена по радиусу круга широты, как показаио иа рисуике. Геометрическая сумма сил $\vec{F}$ и $\vec{I}_ц$ определяет силу тяжестн $\vec{G}$, приложеииую к точке.

Снла реакцин связи $\vec{R}$ для покоящейся точки должиа уравиовешивать силу тяжести. Если связь осуществляется при помощи гибкой иити, иа которой подвешена материальиая точка, то в состояиии равиовесия иить должиа располагаться по диагоиали параллелограмма, построеииого иа векторах $\vec{F}$ и $\vec{I}_ц$. Это иаправление определяет отвесиую лииию в даииом месте Земли. Оиа ие иаправлеиа к центру Земли. Угол $\varphi$, образуемый отвесиой линией с плоскостью экватора, иазывается географической широтой места.

Суточиое вращеиие Земли вызывает отклоиеиие отвесной лииии от иаправлеиия к центру Земли. Величииа отклоиеиия отвесиой лииии определяется углом $\alpha$. Найдем величину угла $\alpha$.

Из треугольиика $FGM$ (см. рис. 8.1) по теореме сииусов пишем пропорцию

$$\frac{I_ц}{G} = \frac{\sin\alpha}{\sin\psi}.$$

Виосим сюда значение $I_ц$ и $G = mg$ н получаем:

$$\sin\alpha = \frac{\omega^2 R\cos\psi}{g}\sin\psi = \frac{\omega^2 R}{2g}\sin 2\psi. \qquad \text{(a)}$$

Приияв $g$ равиым 980 см/с$^2$ иа широте в 45°, где отклоиеиие отвесиой лииии достигает иаибольшего зиачеиия, для $\alpha$ получаем приблизительиое значение 6 угловых мииут.

С помощью рисуика 8.1 иетрудио заключить, что сила тяжести и ее ускорение $g$ измеияются с широтой места. Для нахождения закоиа измеиеиия $g$ при измеиеиии широты иапишем для треугольиика $FGM$ по теореме сииусов пропорцию

$$\frac{G}{F} = \frac{mg}{mg_0} = \frac{\sin\psi}{\sin(\psi + \alpha)} = \frac{1}{\cos\alpha + \sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\psi}.$$

Полагаем (в силу малости угла $\alpha$) $\cos\alpha = 1$ и замеияем $\sin\alpha$ иайдеииым выше выражеиием (а):

$$g = g_0\left(1 + \frac{\omega^2 R}{g_{45^\circ}}\cos^2\psi\right)^{-1} = g_0\left(1 + \frac{1}{289}\cos^2\psi\right)^{-1}.$$

Разложим это выражеиие в ряд по формуле бииома Ньютона н, ограиичиваясь величииами первого порядка малости, получим: $g = g_0\left(1 - \frac{1}{289}\cos^2\psi\right)$.

Таков теоретический закои измеиеиия $g$ с измеиеинем широты, полученный для шарообразиой Земли. Непосредствеиные измерения $g$ прн помощи маятиика приводят к следующей эмпирической формуле:

$$g = g_0\left(1 - \frac{1}{192}\cos^2\psi\right).$$

Различия в коэффициеите при $\cos^2\psi$ приводят к выводу, что Земля в действительиостн ие шар. Оказывается, с хорошим приближеиием ее можио считать эллипсоидом вращеиия. Полярный радиус Земли иа 21 км меиьше, нежели экваториальный. Вследствие этого ньютоиово тяготеиие $F$ при перемещении от полюса к экватору убывает, т. е. сплюсиутость Земли влияет иа ускореиие силы тяжести так же, как и суточиое вращеиие Землн.

Пример 8.2. **Маятиик Фуко.** При двнжеиии материальиой точки отиоснтельио Земли, кроме центробежиой силы инерции, иужио учитывать снлу Кориолиса, которая иаправлеиа перпеидикулярио скорости движения точки. Оиа будет вызывать отклоиеиие частицы от прямолииейиого движеиия (отклоиеиие вправо морских течеиий в северном полушарии, преимуществеииое размываиие правых берегов рек, отклоиеиие свободио падающего тела к востоку и др.).

Особенно наглядно суточное вращение Земли выявляется при наблюдении за движением математического маятника большой длины со сферическим подвесом. Плоскость качаний такого маятника медленно вращается в направлении видимого движения небесного свода. Это впервые было обнаружено в опыте Фуко, поставленном в 1850 г. в Париже. Опыт Фуко имел большое значение, так как нанес последний удар по геоцентрической системе мира, защищавшейся церковью.

Напишем дифференциальное уравнение движения маятника, описанного выше, относительно Земли. Учитывая малость угла $\alpha$, пренебрегаем различием между географической и геоцентрической широтами. Оси координат выбираем следующим образом: начало координат помещаем на поверхности Земли на широте $\varphi$, где производится опыт. Ось $Oz$ направим вертикально вверх, $Ox$ — по касательной к меридиану на юг, ось $Oy$ — по касательной к кругу широты, на восток. Пусть длина маятника $l$, а точка подвеса расположена на оси $Oz$ так, что положение равновесия маятника совпадает с началом координат (см. рис. 8.2). На выбранные оси нужно проецировать основное уравнение (8.6), которое запишем следующим образом:

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{R} - 2m[\vec{\omega}\,\dot{\vec{r}}].$$

Индекс при ускорении опущен и геометрическая сумма силы тяготения и центробежной силы инерции заменена вектором $\vec{G}$, направленным по оси $Oz$ (отклонением отвесной линии от радиуса пренебрегаем). Проекции вектора $\vec{G}$ на соответствующие оси таковы:

$$\vec{G}(0,\ 0,\ -mg).$$

Вектор силы реакции нити $\vec{R}$ направлен по нити к точке подвеса. Обозначая через $x$, $y$, $z$ координаты маятника, для направляющих косинусов вектора силы реакции нити получаем значения:

$$-\frac{x}{l},\ -\frac{y}{l},\ \frac{l-z}{l}.$$

Обозначим через $N$ величину нормальной реакции нити и тогда для проекций силы реакции на оси координат запишем следующие значения:

$$\vec{R}\left(-N\frac{x}{l},\ -N\frac{y}{l},\ N\frac{l-z}{l}\right).$$

Проекции вектора угловой скорости вращения Земли, как следует из рисунка, таковы: $\vec{\omega}(-\omega\cos\varphi,\ 0,\ \omega\sin\varphi)$.

Для проекций кориолисовой силы инерции соответственно имеем такие выражения:

$$I_{\text{К}x} = 2m\omega\dot{y}\sin\varphi,$$
$$I_{\text{К}y} = -2m\omega(\dot{z}\cos\varphi + \dot{x}\sin\varphi),$$
$$I_{\text{К}z} = 2m\omega\dot{y}\cos\varphi.$$

Располагая всеми необходимыми проекциями, запишем дифференциальные уравнения движения маятника Фуко в следующем виде:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -N\dfrac{x}{l} + 2m\omega\dot{y}\sin\varphi, \\ m\ddot{y} = -N\dfrac{y}{l} - 2m\omega(\dot{z}\cos\varphi + \dot{x}\sin\varphi), \\ m\ddot{z} = -mg + N\dfrac{l-z}{l} + 2m\omega\dot{y}\cos\varphi. \end{cases}$$

Эта система уравнений сложна, и решение ее затруднительно. Если мы ограничимся тем, что рассмотрим только малые колебания маятника, система дифференциальных уравнений движения станет проще и позволит довести решение до конца. Будем считать отклонения маятника от положения равновесия малыми величинами и вычисления проведем с точностью до малых величин: $\frac{x}{l}$, $\frac{y}{l}$. Квадратами и более

высокимн степеиямн этнх отиошенй пренебрегаем. Тогда легко видеть, что коорднната $z$ будет велнчнной высшего порядка малостн по сравненню с $x$ н $y$. Действнтельно, из уравиеиия сферы, по которой движется маятник, $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$ следует:

$$l - z = l\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{l^2}} \approx l.$$

Таким образом, в сделаииом приблнжеинн следует считать $z = \dot{z} = \ddot{z} = 0$, т. е. движеиие маятника пронсходит в плоскостн $xOy$. Диффереициальные уравнеиия движеиия прн указаниом прнблнжении приобретают следующий внд:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -N\dfrac{x}{l} + 2m\omega\dot{y}\sin\varphi, \\ m\ddot{y} = -N\dfrac{y}{l} - 2m\omega\dot{x}\sin\varphi, \\ 0 = -mg + N + 2m\omega\dot{y}\cos\varphi. \end{cases}$$

Третье уравнение определяет величнну нормальиой реакцнн нити маятинка. Последиее слагаемое в ием мало по сравнеиию с первымн двумя ввиду наличия двух малых миожителей $\omega$ н $\dot{y}$, н поэтому им в первом прнближенни можно пренебречь. Тогда нз последиего уравнения следует, что натяжение ннти маятиика постоянно и равно: $N = mg$.

Внося это зиачение натяжеиия в первые два уравиения, получаем уравиения двнжеиия маятника в плоскости $xOy$:

$$\ddot{x} = -g\frac{x}{l} + 2\omega\dot{y}\sin\varphi,$$

$$\ddot{y} = -g\frac{y}{l} - 2\omega\dot{x}\sin\varphi.$$

Для интегрнрования этой снстемы умножим первое уравиеиие иа $-y$, второе — иа $x$ и сложнм их. Получим:

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = -2\omega\sin\varphi(x\dot{x} + y\dot{y}),$$

нлн

$$\frac{d}{dt}(x\dot{y} - y\dot{x}) = -2\omega\sin\varphi\frac{d}{dt}\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right).$$

Введем теперь в плоскости $xOy$ поляриые коордннаты $r$ н $\vartheta$ н с помощью формул перехода от декартовых координат к поляриым последиее уравнеиие преобразуем к виду

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\vartheta}) = -2\omega\sin\varphi\frac{d}{dt}\left(\frac{r^2}{2}\right).$$

Накоиец, выполняя нитегрнрованне, имеем:

$$r^2\dot{\vartheta} = -\omega\sin\varphi r^2 + C.$$

Нанболее простой характер двнжения маятинка получится при начальиом условии $r\,|_{t=0} = 0$. Этому условию соответствует приведеиие в двнжеиие маятиика толчком из положеиия равиовесия. Прнияв такое условие, видим, что произвольиая постояииая $C$ в первом интеграле равиа нулю, и мы имеем:

$$\dot{\vartheta} = \frac{d\vartheta}{dt} = -\omega\sin\varphi.$$

Плоскость качання маятннка, такнм образом, вращается с постояиной угловой скоростью $\omega\sin\varphi$ вокруг оси $Oz$ в иаправленни восток — юг — запад. На полюсе ($\varphi = 90°$) плоскость качаний делает за суткн полный оборот; иа экваторе плоскость качаиий иеподвнжна относительио Землн.

Пример 8.3. **Свободное падеиие тяжелой материальной точки.**

Рассмотрнм свободное падение тяжелой материальной точки с высоты $h$ без начальной скоростн на поверхность Землн. Основиое векториое уравиеиие относительиого движеиня (8.6), прииимая во вннмаиие введениую в предыдущем параграфе

силу тяжести $\vec{mg} = \vec{F} + \vec{I}_ц$, запишем в виде

$$m\vec{a} = m\vec{g} - 2m[\vec{\omega}\,\dot{\vec{r}}],$$

где учтена сила Кориолиса.

Для изучения движения относительно Земли систему координат выбираем следующим образом: в плоскости горизонта ось $Ox$ направляем на юг, ось $Oy$ — на восток, а ось $Oz$ — вертикально вверх ($\varphi \simeq \psi$) (рис. 8.2). Удобно, оставляя ориентацию осей неизменной, поместить начало координат на высоте $h$ над Землей, совместив его с начальным положением точки. При таком выборе начала координат все начальные условия будут нулевыми и все произвольные постоянные интегрирования будут равны нулю, поэтому мы их можем при решении не писать.

Спроецировав векторное уравнение на выбранные оси, получим следующие дифференциальные уравнения движения:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -2m(\omega_y\dot{z} - \omega_z\dot{y}), \\ m\ddot{y} = -2m(\omega_z\dot{x} - \omega_x\dot{z}), \\ m\ddot{z} = -mg - 2m(\omega_x\dot{y} - \omega_y\dot{x}). \end{cases}$$

Для решения этой системы уравнений удобнее явно ввести величину угла между скоростью движения материальной точки и угловой скоростью Земли. Сокращая на $m$ и находя проекции угловой скорости на оси, имеем:

$$\ddot{x} = 2\omega\dot{y}\sin\varphi,\ \ddot{y} = -2\omega(\dot{z}\cos\varphi - \dot{x}\sin\varphi),\ \ddot{z} = -g + 2\omega\dot{y}\cos\varphi. \qquad \text{(а)}$$

После первого интегрирования данных уравнений получим:

$$\dot{x} = 2\omega y\sin\varphi,\ \dot{y} = -2\omega(z\cos\varphi - x\sin\varphi),\ \dot{z} = -gt + 2\omega y\cos\varphi. \qquad \text{(в)}$$

Подставляя $\dot{y}$ в выражение для $\ddot{x}$, получаем:

$$\ddot{x} = -4\omega^2(z\cos\varphi - x\sin\varphi)\sin\varphi.$$

Так как угловая скорость мала (см. пример 8.1), членом с $\omega^2$ пренебрегаем и имеем $\ddot{x} = 0$, т. е. $\dot{x} = \text{const}$, а с учетом начальных условий $\dot{x} = 0$. Отсюда и $x = 0$ во все время движения.

Подставляя $z$ в уравнение для $\ddot{y}$, имеем в том же приближении

$$\ddot{y} = 2\omega gt\cos\varphi,\ \dot{y} = \omega gt^2\cos\varphi,$$

откуда

$$y = \frac{1}{3}\omega gt^3\cos\varphi.$$

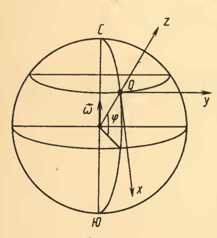



Рис. 8.2.

Наконец, подставляя найденное значение $y$ в последнее уравнение системы (в) и пренебрегая малым вторым слагаемым, получаем:

$$\dot{z} = -gt,$$

а

$$z = -\frac{gt^2}{2}.$$

Исключая из выражений для $y$ и $z$ время, находим траекторию движения: свободно падающее тело движется по параболе, заданной уравнением

$$y = \frac{2\sqrt{2}}{3}\omega\cos\varphi z^{\frac{3}{2}},$$

отклоняясь к востоку (по оси $Oy$) пропорционально кубу времени движения. Простой расчет показывает, что на средней широте в 60° отклонение при падении с высоты 500 м, занимающем около 10 с, дает величину $y = 0{,}2$ м.

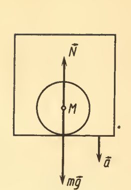


Рис. 8.3.

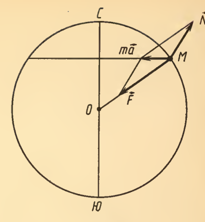


Рис. 8.4.

На полюсе, где $\varphi = 90°$, $y = 0$, т. е. тело падает по вертикали. Наибольшее отклонение на экваторе, причем оно объясняется превышением скорости движения по окружности материальной точки, поднятой над Землей, над скоростью точек на поверхности Земли.

Пример 8.4. **Решение простой задачи в инерциальной системе.** В школьном курсе механики силы инерции не рассматриваются, однако с неинерциальными системами иметь дело там приходится. При этом используется прием, по существу близкий к применяемому в нашем курсе для решения вопроса о движении в инерциальной системе. Как правило, рассматривается тело, покоящееся в неинерциальной системе, и определяется сила реакции (давление тела на опору, растягивание подвеса). Решается задача в той инерциальной системе, в которой задано движение неинерциальной. Например, для определения силы давления человека на пол лифта при опускании (подъятии) последнего с ускорением $\vec{a}$ рассматривается рисунок 8.3. Равнодействующая силы тяжести и силы реакции пола придает человеку (движущемуся вместе с лифтом) заданное ускорение лифта: $ma = mg - N$. Отсюда находится $N = m(g - a)$ и делается заключение о равной и противоположно направленной силе давления на пол.

Аналогично объясняется зависимость силы тяжести от положения тела на поверхности Земли, т. е. центробежная сила не вводится, а сила, создающая центростремительное ускорение, рассматривается как равнодействующая силы тяготения и силы реакции (рис. 8.4).

**8.3. Принцип эквивалентности. Состояние невесомости.** Силы инерции, действующие на материальную точку в неинерциальных системах отсчета, по своим проявлениям не отличаются от фундаментальной силы, действующей в гравитационном поле. Это их свойство обусловлено пропорциональностью, а при принятом выборе единиц — равенством гравитационной и инертной масс тел. Рассмотрим гравитационную и инертную массы. В законе всемирного тяготения $\vec{F} = -G\frac{m'_1m'_2}{r^3}\vec{r}$ и во втором законе Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$ речь идет по существу о различных массах: $m'$ — это гравитационная масса, она вызывает силу тяготения (является аналогом электрического заряда в законе Кулона), а $m$ во втором законе Ньютона — инертная масса, определяющая ускорение при действии на тело заданной силы. *Пропорциональность и равенство $m'$ и $m$ для*

*всех тел не вытекают из каких-либо положений механики, а являются самостоятельным утверждением — обобщением экспериментальных фактов.* (Равенство тяжелой и инертной масс проверено экспериментально с очень высокой точностью.)

Важнейшим следствием равенства тяжелой и инертной масс является равенство ускорений для всех тел в данной точке гравитационного поля. В самом деле, находя ускорение тела массой $m_1$ из приведенных выше формул, имеем:

$$\vec{g} = -G\frac{m_2'}{r^3}\vec{r},$$

куда масса рассматриваемого тела не входит. Также не зависят от массы и ускорения тел, вызванные силами инерции. Поэтому пропорциональность друг другу тяжелой массы и массы инертной приводит *к утверждению о неразличимости* (в небольшой части пространства за небольшие промежутки времени) *сил инерции и сил тяготения.* Это утверждение носит название *принципа эквивалентности.* Согласно этому принципу поле тяготения в небольшой области пространства и времени (оно однородное стационарное) по своему действию тождественно действию сил инерции в ускоренной системе отсчета.

Принцип эквивалентности сыграл фундаментальную эвристическую роль при создании общей теории относительности; в ОТО равноправными считаются все системы отсчета, а не только инерциальные.

Ускорение силы тяжести зависит от широты места на Земле (см. пример 8.1). Так как *весом тела называют численную величину (модуль) силы тяжести, действующей на тело, находящееся вблизи земной поверхности*[1], то вес тела также зависит от широты места на Земле.

Возможно своеобразное состояние тела в ускоренной системе, при котором отсутствуют силы реакции; оно носит название *невесомости.* Рассмотрим материальную точку в неинерциальной системе, связанной с искусственным спутником Земли как телом отсчета. (Сопротивлением движению спутника разреженных слоев атмосферы пренебрегаем; двигатели спутника не работают.) Уравнение движения материальной точки в системе спутника, штрихованной, в соответствии с формулой (8.9) и с учетом того, что спутник не имеет углового ускорения, будет иметь вид:

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{R} - m\vec{a}_0 - m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\,\vec{r}']] - 2m[\vec{\omega}\vec{v}'].$$

Ускорение движения спутника $\vec{a}_0$ в (инерциальной) системе Земля находим, применяя второй закон Ньютона к спутнику, испытывающему силу притяжения Земли:

$$m\vec{a}_0 = \vec{F}.$$

Но в таком случае

$$\vec{F} - m\vec{a}_0 = 0$$

[1] Физический энциклопедический словарь.— М.: Советская энциклопедия, 1983.— С. 70.

и окончательно получаем:

$$m\vec{a'} = \vec{R} - m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r'}]] - 2m[\vec{\omega}\vec{v'}]. \qquad (8.13)$$

Свободная от связей материальная точка движется в системе спутника ускоренно под действием центробежной и кориолисовой сил, тогда как сила притяжения Земли оказывается из уравнения исключенной. Если спутник специально не «закручен», т. е. его угловая скорость равна 0 или мала, то тела внутри спутника движутся с очень малыми ускорениями. При соприкосновении покоящегося в спутнике тела со стенкой условие равновесия тела приобретает вид:

$$\vec{R} = m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r'}]],$$

или при $\vec{\omega} = 0$ $R = 0$, т. е. *силы реакции отсутствуют.* Такое состояние и называют состоянием *невесомости.*

Неинерциальная система спутника в небольшой области пространства вокруг него в рассмотренном случае движения спутника ведет себя как инерциальная система без силы тяготения (такие системы в общей теории относительности называют локально инерциальными). В заключение заметим, что спутник ка́к тело отсчета не отличается от любого тела, движущегося в поле силы тяжести, поэтому вышесказанное об неинерциальной системе спутника справедливо для планет. В частности, в неинерциальной системе, связанной с Землей, сила притяжения к Солнцу не фигурирует (правда, она и весьма мала по сравнению с силой притяжения к Земле — примерно 0,0005 последней).

**Методические замечания** к определению веса и понятию невесомости. В школьном курсе *силу, с которой тело вследствие его притяжения к Земле действует на опору или подвес, называют весом тела.* Таким образом, вес $\vec{P}$ и сила тяжести $\vec{G}$ — две разные силы, приложенные к разным телам. Если тело находится в покое вблизи поверхности Земли, то $\vec{P} = \vec{G}$ и $P = G$ в соответствии с другим (данным нами выше) определением веса. Но если тело находится в неинерциальной системе отсчета, движущейся относительно Земли, то в понятие веса возможно включение других переносных сил инерции, кроме центробежной, обусловленной вращением Земли,— это видно из формулы (8.8).

Понятно, что более широкое толкование веса при школьном его определении удобно для объяснения состояния невесомости и перегрузок. Однако возникают некоторые методические трудности. Речь идет, например, о том, изменяется ли вес человека в автомобиле, выполняющем крутой поворот; чему равен вес тела в лифте, падающем с ускорением, большим $g$; куда он направлен и т. д.

В традиционной трактовке веса силы инерции включаются в него только за счет движения Земли, но отнюдь не за счет движения какой-либо другой неинерциальной системы отсчета. При таком, несомненно, более последовательном определении веса состояние невесомости нужно трактовать как статическое состояние при отсутствии сил реакции в неинерциальной системе. Вес же тела изменяется только за счет изменения положения тела относительно Земли.

## ГЛАВА III. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

С формально-математической точки зрения общие теоремы динамики являются результатом простых тождественных преобразований основного векторного уравнения динамики

$$m\vec{a} = \vec{F},$$

где под вектором $\vec{F}$ подразумевается равнодействующая всех сил, приложенных к точке, включая и реакции связей, если общая теорема применяется к несвободной точке.

Общие теоремы позволяют ввести ряд новых физических понятий, таких, как энергия, импульс, работа, что позволяет полнее раскрыть закономерности механического движения. Практическая ценность общих теорем состоит в возможности установления признаков, на основании которых сразу можно заключить о существовании отдельных первых интегралов движения. Постоянство же соответствующих величин имеет глубокое происхождение, связанное с основными свойствами пространства и времени; оно отражено в законах сохранения.

### § 9. Закон изменения и закон сохранения импульса материальной точки

**9.1. Теорема об изменении импульса материальной точки.** Понятие импульса материальной точки является одним из наиболее общих, универсальных понятий физической науки. Оно используется не только в механике, но и во всех других разделах физики. Поэтому знание закона изменения импульса оказывается весьма существенным. В механике как определение импульса, так и закон его изменения вытекают из законов Ньютона. Теорема об изменении импульса материальной точки является результатом простейшего тождественного преобразования основного уравнения механики. Ввиду постоянства массы материальной точки основное уравнение (6.1) можно написать в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}. \tag{9.1}$$

После умножения на $dt$ получаем уравнение

$$d(m\vec{v}) = \vec{F}dt, \tag{9.2}$$

дающее дифференциальную форму теоремы об изменении импульса. Вектор $m\vec{v}$ в формуле (9.2) называется *импульсом материальной точки* (или количеством движения материальной точки) и обозначается буквой $\vec{p}$: $\vec{p} = m\vec{v}$. Вектор $\vec{F}dt$ называется элементарным импульсом силы. Словесная формулировка теоремы, выраженной формулой (9.2), сводится к предложению: *дифференциал импульса материальной точки равен элементарному импульсу силы, приложенной к ней.*

Вектор импульса силы за конечный промежуток временн равен геометрнческой сумме элементарных ее нмпульсов за данный промежуток:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt. \qquad (9.3)$$

Интегрнруя уравнение (9.1) по промежутку времени $\Delta t = t_2 - t$, получаем интегральную формулнровку теоремы об измененнн нмпульса:

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt. \qquad (9.4)$$

В проекциях уравнения, выражающне теорему, таковы:

$$m\dot{x}_2 - m\dot{x}_1 = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt,$$

$$m\dot{y}_2 - m\dot{y}_1 = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt,$$

$$m\dot{z}_2 - m\dot{z}_1 = \int_{t_1}^{t_2} F_z dt.$$

Можно отметнть, что Ньютон второй закон двнжения сформулнровал в внде теоремы об изменении колнчества двнжения, а не в форме «пронзведенне массы на ускоренне равно снле».

Практнческое значенне теоремы об нзмененнн нмпульса матернальной точки прн решении задач невелико, так как дифференцнальная форма ее предоставляет основное уравнение днналмнкн с разделенными переменнымн, н по сравненню с (6.1) она существенно новых соотношеннй не дает. Главная область применения теоремы в механике — это нзученне мгновенных нлн ударных снл. Так называются снлы, продолжнтельность действня которых весьма мала, н закон нзмененйя нх со временем практическн остается нензвестным. Такне снлы будут характернзоваться вектором нмпульса снлы (9.3).

**9.2. Закон сохранения импульса материальной точки.** Этот закон следует из теоремы об нзмененни нмпульса и читается так: *если равнодействующая сил, приложенных к материальной точке, равна нулю, вектор импульса тела остается величиной постоянной во все время движения,* т. е.

$$\vec{p} = m\vec{v} = \text{const}. \qquad (9.5)$$

Напишем теорему об измененин нмпульса подробно, подставив сумму заданных сил н снл реакций в формулу (9.2), которая после подстановкн прнмет внд:

$$d\vec{p} = (\vec{F} + \vec{R})dt. \qquad (9.6)$$

В ннерциальных снстемах отсчета нмпульс точкн сохраняется прн условии $\vec{F} + \vec{R} = 0$.

Закон сохранення нмпульса объедняет *три первых интеграла движения,* которые получнм проецированнем векторного равенства (9.5) на осн координат: $\dot{x} = C_1$, $\dot{y} = C_2$, $\dot{z} = C_2$.

Закон справедлнв и для изолнрованной свободной от связей матернальной точкн, т. е. двнжущейся по ннерции.

В поле сил могут существовать *все три* интеграла импульса, если равнодействующая равна нулю, а также *любые* два или *один*. Существование отдельных интегралов импульса связано с симметрией силового поля. Если материальная точка находится в поле сил, направленных параллельно одной из координатных осей, то существуют два интеграла движения — сохраняются проекции на оси, перпендикулярные силам. Пусть, например, силы параллельны оси $Oz$, тогда $\vec{F} \neq 0,\ F_z \neq 0,\ F_x = F_y = 0.$

В этом случае существуют два первых по порядку следования из вышеуказанных интегралов. Если же силы располагаются в плоскостях, перпендикулярных одной из осей, то существует один интеграл относительно данной оси. Пусть, например, силы располагаются в плоскости, перпендикулярной оси $Ox$. Тогда

$$\vec{F} \neq 0,\ F_y \neq 0,\ F_z \neq 0,\ F_x = 0.$$

В этом случае существует только интеграл $\dot{x} = C_1$. К изменению импульса приводят также силы реакции связей.

Заметим, что импульс — величина не инвариантная при преобразованиях Галилея. В самом деле, с помощью формулы (3.13) имеем: $p_x = mv + p_{x'},\ p_y = p_{y'},\ p_z = p_{z'}.$

**Методическое замечание к понятию импульса.** Закон сохранения импульса изолированной материальной точки и форма основного уравнения динамики (9.1) дают возможность логически просто и последовательно ввести понятие силы и второй закон Ньютона. Если импульс тела изучить до законов Ньютона, то закон инерции можно сформулировать как закон сохранения импульса изолированной материальной точки. Далее следует постулировать сохранение импульса в замкнутой системе материальных точек. Взаимодействие в такой системе будет заключаться в передаче импульса от одних точек к другим, а сила, действующая на материальную точку, будет некоторой функцией положения рассматриваемой точки относительно остальных, определяющей скорость передачи импульса рассматриваемой точки от других точек системы. Уравнение (9.1), т. е. второй закон Ньютона, запишется как следствие закона сохранения импульса системы точек: импульс, полученный материальной точкой (в единицу времени), равен импульсу, переданному ей другими точками. Анализ процесса обмена импульсом между двумя точками немедленно приводит к следствию — третьему закону Ньютона. Важно, что трактовка силы и второго закона Ньютона в форме (9.1) без каких-либо изменений применима к действию на материальную точку физического поля. В этой трактовке сила есть скорость передачи импульса точке полем, определяющаяся параметрами поля и положением точки в нем. Это значит, что понятие силы находит обобщение за пределами чисто механической концепции взаимодействия (см. § 5). Также объясняется ограниченность применения третьего закона Ньютона при наличии полей: обмен импульсами может происходить между телом и полем, между телами через поле, но не непосредственно между двумя телами.

Пример 9.1. **Использование теоремы об изменении импульса для изучения удара.**

Ударом называют такое взаимодействие, при котором за очень малый промежуток времени (порядка сотых — десятитысячных секунды) импульсы соударяющихся точек (тел) изменяются на конечную величину.

При соударении возникают мгновенные или импульсные силы, которые могут достигать огромной величины. Пусть время удара τ. Применим теорему (9.4) об изменении импульса к испытавшей удар материальной точке:

$$m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \int_t^{t+\tau} \vec{F}dt = \vec{K}.$$

В этом случае $\vec{K}$ называется ударным импульсом.

Как правнло, закон изменения ударной силы за время удара иензвестеи. Усредияя снлу, получнм (из предыдущего равеиства по теореме о средием) ударнай импульс:

$$m\Delta \vec{v} = \vec{\bar{F}}\tau.$$

Это уравиенне иазывают *основным уравнением удара*. Приращеине скорости за время удара пропорцнональио величине ударной силы и совпадает с ней по направленню.

## § 10. Закон изменения и закон сохранения момента импульса материальной точки

**10.1. Момент силы. Момент импульса.** *Моментом силы относительно произвольной точки O называется вектор* $\vec{M}$, определяемый формулой

$$\vec{M} = [\vec{r}\ \vec{F}], \tag{10.1}$$

где $\vec{r}$ — вектор, проведенный нз точки $O$ в точку прнложення снлы (рнс. 10.1). Как следует нз определення, т. е. формулы (10.1), вектор момента снлы направлен перпенднкулярно плоскости векторов $\vec{r}$ н $\vec{F}$ н образует с ннми правовинтовую снстему. Велнчина момента снлы равна удвоенной площади треугольннка $OAB$. Момент $\vec{M}$ завнсит от выбора точкн $O$, которую далее будем называть *моментной*. Взяв моментную точку $O$ за начало координат, имеем следующне выражения для проекцнй момента снлы на оси декартовых прямоугольных коордннат:

$$\begin{cases} M_x = yF_z - zF_y, \\ M_y = zF_x - xF_z, \\ M_z = xF_y - yF_x. \end{cases} \tag{10.2}$$

*Моментом силы относительно некоторой оси (прямой) называют проекцию на ось вектора момента силы, взятого относительно какой-либо точки на оси*. Целесообразность такого определения состонт в том, что момент силы относительно осн не завнсит от выбора моментной точки, лишь бы она находилась на этой осн. Докажем эту незавнснмость.

Пусть направленне осн определяется еднничным вектором $\vec{s}_0$ (рнс. 10.2). Запншем проекцни момента силы отноcнтельно произ-

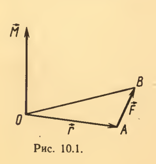


Рис. 10.1.

Рис. 10.2.

вольных точек $O$ и $O_1$ на оси:

$$M_0 = [\vec{r}\ \vec{F}]\vec{s}_0,\ M_{0,1} = [\vec{r}_1\vec{F}]\vec{s}_0.$$

Введем вектор $\overrightarrow{OO_1}$ и найдем связь радиус-векторов $\vec{r}$ и $\vec{r}_1$ между собой. Из рисунка видно, что $\vec{r} = \overrightarrow{OO_1} + \vec{r}_1$. Подставив $\vec{r}$ в выражение для момента относительно точки $O$, имеем:

$$M_0 = [\overrightarrow{OO_1}\vec{F}]\vec{s}_0 + M_{0,1} = M_{0,1},$$

так как смешанное произведение, в которое входят два коллинеарных вектора $\overrightarrow{OO_1}$ и $\vec{S}_0$, равно нулю. Тем самым утверждение о независимости момента относительно оси от выбора моментной точки на оси доказано.

Формулы (10.2) определяют моменты силы $\vec{F}$ относительно координатных осей. Момент силы относительно оси часто называют *вращательным моментом силы*. Легко видеть, что момент силы относительно оси, перпендикулярной плоскости, в которой расположена сила, максимален. Вращательный момент по модулю в этом случае определяется произведением модуля силы на плечо. (Плечо — расстояние по перпендикуляру между осью и линией действия силы.) Если моментная ось и сила расположены в одной плоскости, вращательный момент силы обращается в нуль.

Модуль вектора момента силы относительно произвольной моментной точки также можно определить произведением модуля силы на плечо. В общем случае *плечо силы равно длине перпендикуляра, опущенного из моментной точки на линию действия силы.*

*Момент импульса* материальной точки определяется аналогично моменту силы с помощью следующей формулы:

$$\vec{L} = [\vec{r}\ \vec{p}] = m[\vec{r}\ \vec{v}]. \tag{10.3}$$

Будем считать, что точка $O$ совпадает с началом системы координат. Тогда момент импульса связан простым соотношением с секторной скоростью точки — формула (1.14), а именно $\vec{L} = 2m\vec{\sigma}$.

Проекции на оси прямоугольной декартовой системы координат выражаются формулами:

$$L_x = m(y\dot{z} - z\dot{y}),$$
$$L_y = m(z\dot{x} - x\dot{z}),$$
$$L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

Каждая из этих формул определяет момент импульса материальной точки относительно соответствующей координатной оси.

**10.2. Теорема об изменении момента импульса материальной точки.** Умножим почленно основное векторное уравнение динамики в форме (9.1) слева векторно на радиус-вектор точки. При этом в правой части равенства получим геометрическую сумму моментов заданных сил и сил реакции связей. Обозначая указанную сумму

одной буквой $\vec{M}$, полученное уравнение запишем так:

$$m\left[\vec{r}\,\frac{d\vec{v}}{dt}\right] = \vec{M}.$$

Левую часть можно преобразовать:

$$\vec{r}\left[\frac{d\vec{v}}{dt}\right] = \frac{d}{dt}[\vec{r}\,\vec{v}] - \left[\frac{d\vec{r}}{dt}\vec{v}\right] = \frac{d}{dt}[\vec{r}\,\vec{v}].$$

Окончательно имеем уравнение

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \qquad (10.4)$$

Это и есть формула теоремы об изменении момента импульса материальной точки, которая читается: *производная по времени вектора момента импульса материальной точки по величине и направлению совпадает с вектором суммы моментов всех сил, приложенных к материальной точке.*

В проекциях на оси декартовых прямоугольных координат теорема выражается системой следующих трех уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}m(y\dot{z} - z\dot{y}) = M_x, \\ \frac{d}{dt}m(z\dot{x} - x\dot{z}) = M_y, \\ \frac{d}{dt}m(x\dot{y} - y\dot{x}) = M_z. \end{cases}$$

Каждое из этих уравнений можно трактовать как теорему об изменении момента импульса материальной точки относительно соответствующей координатной оси.

**10.3. Закон сохранения момента импульса.** Закон имеет следующую формулировку: *если момент сил, действующих на материальную точку, равен нулю, то вектор момента импульса остается величиной постоянной на протяжении всего времени движения.*

Этот закон выполняется в инерциальных системах отсчета и для *изолированной свободной* материальной точки, т. е. точки, движущейся по инерции. Однако гораздо существеннее то, что сохранение момента импульса может иметь место в силовом поле. Рассмотрим отдельные случаи сохранения момента импульса при действии сил на движущуюся точку.

Пусть вектор силы, приложенной к точке, остается все время коллинеарным радиус-вектору точки. Такая сила называется *центральной* и *точка O — центром силы.* Примером центральной силы служит сила тяготения, приложенная к планете, со стороны Солнца, сила кулоновского притяжения (отталкивания), действующая на точечный электрический заряд со стороны второго точечного заряда, и др. Момент центральной силы относительно ее центра обращается в нуль. Применяя к точке, движущейся под действием центральной силы, теорему об изменении момента импульса в форме (10.4), приходим к закону сохранения момента импульса ма-

териальной точки:

$$\vec{L} = m[\vec{r}\ \vec{v}] = \overrightarrow{\text{const}}. \qquad (10.5)$$

Закон сохранения момента импульса объединяет три первых интеграла движения, называемых *интегралами площадей*. Проецируя равенство (10.5) на оси декартовой системы, получаем:

$$\begin{cases} y\dot{z} - z\dot{y} = C_4, \\ z\dot{x} - x\dot{z} = C_5, \\ x\dot{y} - y\dot{x} = C_6. \end{cases} \qquad (10.6)$$

Каждый из этих первых интегралов движения выражает постоянство проекции секторной скорости для движения проекции точки на соответствующую координатную плоскость.

При движении точки под действием центральной силы траекторией движения обязательно будет *плоская* кривая. Это заключение следует из определения вектора $\vec{L}$ по формуле (10.3) и требования сохранения постоянства его направления в соответствии с формулой (10.5). Кроме того, из постоянства модуля вектора $\vec{L}$ следует, что точка будет двигаться по траектории с постоянной секторной скоростью (радиус-вектор точки в равные промежутки времени будет описывать равные площади).

Пусть к точке приложена не центральная сила, а такая, направление которой при движении точки не изменяется. Тогда вращательный момент силы относительно любой оси, параллельной силе, равен нулю и имеет место один из интегралов площадей (10.6). Точка движется, сохраняя момент импульса относительно данной оси неизменным.

В соответствии с определением момента импульса, выраженным формулой (10.3) и формулами преобразования координат Галилея (3.11), момент импульса не является инвариантной величиной, а преобразуется по формуле:

$$\vec{L} = [\vec{r}' m\vec{v}_{\text{п}}] + [\vec{v}_{\text{п}} t m\vec{v}'] + \vec{L}'. \qquad (10.7)$$

В заключение отметим, что рассмотренные теоремы динамики материальной точки позволили получить *шесть* интегралов движения: *три интеграла проекций импульса и три интеграла проекций момента импульса*. Однако не все эти интегралы оказываются независимыми. Умножив скалярно (9.5) на (10.5) и сократив на квадрат массы, получим:

$$\vec{v}[\vec{r}\,\vec{v}] = C_1C_4 + C_2C_5 + C_3C_6 = 0,$$

так как смешанное произведение, содержащее два одинаковых вектора, равно нулю. Это означает, что из шести интегралов проекций импульса и момента импульса независимых только пять.

Одновременное сохранение импульса и момента импульса имеет место только при $\vec{F} = 0$, например для изолированной свободной точки, движущейся по инерции.

## § 11. Работа силы. Потенциальная энергия материальной точки в силовом поле

**11.1. Работа силы.** *Работа постоянной силы $\vec{F}$ на прямолинейном перемещении $\Delta\vec{r}$, образующем с направлением силы угол $\alpha$, определяется формулой*

$$A = F\Delta r\cos\alpha = \vec{F}\Delta\vec{r}.$$

При переменной силе и движении по кривой такое определение работы непригодно. К общему определению работы (для переменной силы и произвольного движения) приходим обычным способом: применяем математический анализ.

Пусть траекторией материальной точки служит кривая $AB$ (рис. 11.1). Разбиваем отрезок кривой между точками (1) и (2) на бесконечно малые элементы, которые можно рассматривать как прямолинейные. Пусть $d\vec{r}$ — вектор бесконечно малого перемещения и $\vec{F}$ — вектор силы для данного положения точки на кривой. Тогда последняя формула может быть применена для вычисления работы силы на бесконечно малом перемещении. Учитывая это, получим для *элементарной* работы:

$$\delta A = \vec{F}d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \qquad (11.1)$$

В общем случае линейная функция дифференциалов координат в (11.1) не является полным дифференциалом какой-либо функции координат. Чтобы отметить это обстоятельство в обозначении элементарной работы, применена буква $\delta$.

Для определения работы на конечном участке кривой $AB$ нужно просуммировать элементарные работы. Таким образом, *алгебраическая сумма элементарных работ на всех элементах дуги кривой $AB$ между указанными точками кривой (1) и (2) есть работа силы на конечном участке траектории:*

$$A_{1,2} = (AB)\int \vec{F}d\vec{r} = (AB)\int (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \qquad (11.2)$$

Кратко работу силы можно определить как интеграл от силы, взятый вдоль траектории движения точки. (В математике такие интегралы называются криволинейными.)

Для вычисления работы силы в общем случае необходимо знать кинематические уравнения движения точки. Тогда криволинейный интеграл в (11.2) может быть сведен к определенному интегралу. Действительно, пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ — кинематические уравнения движения (тогда $dx = \dot{x}dt$ и т. д.) и проекции силы $F_x$, $F_y$, $F_z$ после внесения в них значений координат и производных координат по времени будут известными функциями времени. Таким образом, элементарная

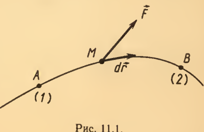



Рис. 11.1.

работа будет иметь вид:

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \Phi(t)dt,$$

где $\Phi(t)$ — известная функция времени. Далее из уравнений движения определяем моменты времени $t_1$ и $t_2$, соответствующие нахождению точки в положениях (1) и (2). Это даст нам пределы интегрирования по $t$. Окончательно имеем:

$$A_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t)dt,$$

т. е. работа вычисляется как определенный интеграл от функции времени.

**11.2. Потенциальные силы. Потенциальная энергия материальной точки в силовом поле.** *Потенциальными силами* называются силы, не зависящие от скорости движения точки

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z, t) \tag{11.3}$$

и удовлетворяющие условию

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} U. \tag{11.4}$$

Здесь $U$ — скалярная функция, называемая *потенциальной энергией* и также не зависящая от скорости, т. е.

$$U = U(x, y, z, t). \tag{11.5}$$

Условие потенциальности силы (11.4) иногда оказывается неудобным для практического применения, так как требуется знание потенциальной энергии, которую часто следует находить. Поэтому оно заменяется следующим эквивалентным условием:

$$\operatorname{rot}\vec{F} = 0, \tag{11.6}$$

ибо $\operatorname{rot}\operatorname{grad} U = 0$ для любой функции[1].

Условие (11.4) в проекциях на оси декартовой системы координат выражается тремя равенствами:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \; F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \; F_z = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

а условие (11.6) приводится к виду

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z}, \; \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}, \; \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}.$$

Последние равенства не содержат потенциальной энергии, и для проверки потенциальности силы достаточно убедиться в справедливости любых двух из них. Заметим, что условия потенциальности тривиально выполняются для силового поля, проекции сил в котором не зависят от координат, т. е. *однородное поле потенциально.*

Следует различать *стационарную* и *нестационарную силы.* Стационарная явно от времени не зависит, и ей соответствует *стационарное поле,* задаваемое функциями:

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z), \; U = U(x, y, z). \tag{11.7}$$

---

[1] См. приложение II, № 1, 4.

*Нестационарной* потенциальной силой называется сила, которая явно зависит от времени, и потенциальное поле является нестационарным; оно описывается общей формулой (11.5).

Рассмотрим сначала, как вычисляется работа и потенциальная энергия в стационарном поле (11.7). Найдем элементарную работу потенциальной силы:

$$\delta A = \vec{F}d\vec{r} = -\operatorname{grad} U(x, y, z)d\vec{r} =$$
$$= -\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right) = -dU.$$

В этом случае

$$\delta A = -dU, \tag{11.8}$$

$$A_{1,2} = \int\limits_{(1)}^{(2)} \vec{F}d\vec{r} = -\int\limits_{U_1}^{U_2} dU = U_1 - U_2. \tag{11.9}$$

Из формулы (11.9) видно, что *работа не зависит от формы траектории и определяется разностью потенциальных энергий в начале и конце отрезка траектории.*

Потенциальная энергия в любой точке поля выражается с помощью неопределенного интеграла:

$$U = -\int \vec{F}d\vec{r} + C \tag{11.10}$$

и всегда вычисляется с точностью до произвольной постоянной $C$, которой можно придать любое значение (если возможно, то удобнее всего нуль). Выбор постоянной $C$ — начальной энергии — носит название нормирования (калибровки) потенциальной энергии. Возможность произвольного выбора начала отсчета для $U$ объясняется тем, что величина потенциальной энергии непосредственно не измеряется; измеряется только работа, равная разности энергий.

Рассмотрим теперь нестационарное силовое поле, задаиное формулой (11.3). Для него потенциальная энергия выражается функцией (11.5), содержащей время явно. Как и в стационарном поле, потенциальная нестационарная сила определена формулой

$$\vec{F}(\vec{r},t) = -\operatorname{grad} U(\vec{r},t),$$

но, так как $dU(x, y, z, t) = \operatorname{grad} U d\vec{r} + \frac{\partial U}{\partial t}dt$,

вместо формулы для элементарной работы (11.8) получаем:

$$\delta A = -dU + \frac{\partial U}{\partial t}dt. \tag{11.11}$$

Вычислить работу как убыль потенциальной энергии теперь нельзя, и для расчета работы следует пользоваться формулой (11.2). Зная силу, потенциальную энергию находим с помощью равенства (11.4), которое в проекциях приводит к следующим трем дифференциальным уравнениям в частных производных:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -F_x(\vec{r},t), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -F_y(\vec{r},t), \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -F_z(\vec{r},t).$$

Все эти уравнения удовлетворяются, в чем нетрудно убедиться с помощью дифференцирования, следующим решением:

$$U = -\int \vec{F}(\vec{r},t)d\vec{r} + C. \qquad (11.12)$$

Таким образом, в случае нестационарного поля потенциальная энергия находится по той же формуле (11.10), что и для стационарного, однако в нее в качестве *параметра* входит время.

Кроме потенциальных полей, удовлетворяющих условию (11.6), существуют силовые поля, для которых $\text{rot}\,\vec{F} = \vec{j}(\vec{r},t)$, где $\vec{j}(\vec{r},t)$ — некоторая функция координат и времени. Такие поля непотенциальны, и понятие потенциальной энергии для них неприменимо. В непотенциальном поле $\delta A$ не является полным дифференциалом, и работа на конечном участке кривой зависит от формы этой кривой.

Примером непотенциального поля является электромагнитное поле в его общем случае. К непотенциальным силам принадлежат силы трения, сопротивления среды движению тел.

Пример 11.1. **Расчет потенциальной энергии в однородном поле силы тяжести.**

Направив ось $Oz$ вертикально вверх, для проекции силы получаем выражения $F_x = F_y = 0$, $F_z = -mg$. Элементарная работа имеет вид:

$$\delta A = -mgdz = -d(mgz + C).$$

Отсюда потенциальная энергия силы тяжести является функцией координат: $U = mgz + C$. Приписывая потенциальной энергии для какой-нибудь точки пространства числовое значение, можно устраинть произвольную постоянную. Это и называется нормировкой потенциальной энергии. Полагая, например, потенциальную энергию равной нулю при $z = 0$, получим более простое выражение:

$$U = mgz. \qquad (11.13)$$

Пример 11.2. **Вычисление потенциальной энергии для квазиупругой силы.**
Сила, изменяющаяся по закону

$$\vec{F} = -k\vec{r}, \qquad (11.14)$$

называется квазиупругой. Коэффициент $k$ называется коэффициентом жесткости квазиупругой силы. Проекции квазиупругой силы на оси координат таковы:

$$F_x = -kx,\ F_y = -ky,\ F_z = -kz.$$

Поэтому для элементарной работы получается следующее выражение:

$$\delta A = -k(xdx + ydy + zdz) = -d\left(k\frac{x^2+y^2+z^2}{2} + C\right) = -d\left(\frac{kr^2}{2} + C\right).$$

Приняв для потенциальной энергии значение $U|_{r=0} = 0$, получаем ее окончательное выражение:

$$U = \frac{1}{2}kr^2. \qquad (11.15)$$

Пример 11.3. **Вывод формулы потенциальной энергии в поле силы ньютонова тяготения.**

Обозначим через $\vec{r}$ радиус-вектор, проведенный от Солнца к планете, $m$ — массу планеты, $M$ — массу Солнца.

Тогда вектор силы тяготения, приложенной к планете, выразится равенством

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^3}\vec{r}. \qquad (11.16)$$

(Это формула закона всемирного тяготения Ньютона.)

Выпишем проекции силы на оси координат с началом в центре Солнца:

$$F_x = -G\frac{mM}{r^3}x,\ F_y = -G\frac{mM}{r^3}y,\ F_z = -G\frac{mM}{r^3}z.$$

Для элементарной работы получим формулу:

$$\delta A = -G\frac{mM}{r^3}(xdx + ydy + zdz) = -G\frac{mM}{r^3}d\left(\frac{r^2}{2} + C\right),$$

$$\delta A = -G\frac{mM}{r^2}dr = -d\left(-G\frac{mM}{r} + C\right).$$

Отсюда следует выражение для искомой потенциальной энергии: $U = -G\dfrac{mM}{r} + C.$

В данном случае потенциальная энергия нормируется обычно на бесконечность, т. е. полагают $U|_{r=\infty} = 0$. Окончательно получаем:

$$U = -G\frac{mM}{r} = -\frac{\gamma m}{r}. \qquad (11.17)$$

Пример 11.4. **Расчет потенциальной энергии нестационарной силы.**

Все приведенные выше примеры относятся к стационарным полям. В качестве нестационарного потенциального поля рассмотрим электрическое однородное, т. е. постоянное в пространстве, но переменное во времени (например, поле в конденсаторе или электрическую составляющую поля электромагнитной волны в небольшой по сравнению с длиной волны области пространства). Напряженность такого поля выражается формулой

$$\vec{E} = \vec{E}_0\cos\omega t,$$

а сила, действующая на точечный электрический заряд,—

$$\vec{F} = q\vec{E}_0\cos\omega t.$$

Используя непосредственно формулу (11.12), имеем:

$$U = -q\vec{E}_0\cos\omega t\int d\vec{r} + C = -q\vec{E}_0\vec{r}\cos\omega t + C. \qquad (11.18)$$

Потенциальная энергия зависит от времени по гармоническому закону.

## § 12. Закон изменения и закон сохранения механической энергии материальной точки

**12.1. Кинетическая энергия. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки.** Выполним преобразование основного уравнения динамики, для того чтобы от силы, действующей на материальную точку, перейти к работе этой силы. Умножая скалярно обе части основного уравнения динамики на вектор бесконечно малого перемещения точки, получаем: $m\dfrac{d\vec{v}}{dt}d\vec{r} = \vec{F}d\vec{r}.$

После простого тождественного преобразования левой части полученного равенства имеем: $md\vec{v}\dfrac{d\vec{r}}{dt} = m\vec{v}d\vec{v}.$

Далее с помощью тождества $m\vec{v}\cdot d\vec{v} = d(\frac{1}{2}mv^2)$ приходим к искомому уравнению:

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \vec{F}d\vec{r}. \qquad (12.1)$$

Уравнение (12.1) показывает, что элементарная работа силы, действующей на материальную точку, равна элементарному при-

ращению (дифференциалу) величины $\frac{1}{2}mv^2$, называемой *кинетической энергией* материальной точки и обозначаемой через букву $T$:

$$T = \frac{1}{2}mv^2. \tag{12.2}$$

С учетом формулы (12.2) вместо (12.1) имеем:

$$dT = \delta A. \tag{12.3}$$

Уравнения (12.1) или (12.3) дают дифференциальную форму теоремы об изменении кинетической энергии: *дифференциал кинетической энергии материальной точки равен элементарной работе сил, приложенных к этой точке.*

Интегрируя равенство (12.1) по траектории между какими-либо двумя точками (*1*) и (*2*) (см. рис. 11.1) и обозначая через $v_1$ и $v_2$ скорости материальной точки в этих положениях, имеем:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int\limits_{(1)}^{(2)} \vec{F}d\vec{r},$$

или

$$T_2 - T_1 = A_{1,2}. \tag{12.4}$$

Полученное равенство выражает интегральную форму теоремы об изменении кинетической энергии: *приращение кинетической энергии материальной точки на некотором участке траектории равно алгебраической сумме элементарных работ, совершенных силами, приложенными к точке.*

**12.2. Закон сохранения полной механической энергии материальной точки.** Из теоремы об изменении кинетической энергии, выраженной формулой (12.1) при дополнительных условиях, которые сейчас будут рассмотрены, вытекает закон сохранения *полной механической энергии;* ею называют *сумму кинетической и потенциальной энергий* материальной точки. Полная энергия обозначается через $E$ и выражается формулой

$$E = T + U. \tag{12.5}$$

Рассмотрим движение несвободной материальной точки относительно инерциальной системы отсчета. Уравнение теоремы об изменении энергии будет иметь вид:

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = (\vec{F} + \vec{R})d\vec{r}, \tag{12.6}$$

где $\vec{F}$ — геометрическая сумма заданных сил, а $\vec{R}$ — геометрическая сумма сил реакций связей, наложенных на материальную точку.

Если связи являются идеальными (§ 7), то работа сил реакций равна нулю: $\vec{R}d\vec{r} = 0$. Приращение кинетической энергии имеет вид: $d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \vec{F}d\vec{r}$. Пусть все заданные силы являются потенциальными и стационарными. Тогда $\delta A = \vec{F}d\vec{r} = -dU(x, y, z)$, т. е. элементарная работа заданных сил выражается через дифференциал потенциальной энергии стационарного поля. Теперь вместо формулы (12.6)

можно написать: $d(\frac{1}{2}mv^2 + U) = 0$, откуда следует постоянство величины в скобках. Итак, в рассмотренном случае имеет место закон сохранения полной механической энергии, который выражается формулой

$$E = T + U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(x, y, z) = \text{const}. \quad (12.7)$$

*Если материальная точка, на которую наложены идеальные связи, движется в стационарном потенциальном поле, то ее полная механическая энергия остается величиной постоянной.* Формула (12.7) выражает первый интеграл движения — интеграл энергии.

Разумеется, закон справедлив и для свободной от связей материальной точки, движущейся в потенциальном поле.

Закон сохранения полной механической энергии есть только частный случай закона сохранения и превращения энергии в природе. Последний не знает исключений, в то время как закон сохранения механической энергии имеет место лишь для потенциальных полей и идеальных связей. Действительно, пусть наряду с потенциальными силами к точке приложены силы трения и сопротивления среды. Тогда работа на заданном перемещении в соответствии с формулой (11.9) представится так: $A_{1,2} = U_1 - U_2 + A'_{1,2}$. При этом работа сил трения и сопротивления среды $A'_{1,2}$ — отрицательна, так как силы направлены противоположно скорости движения. Подстановка величины $A_{1,2}$ в уравнение (12.4) дает с учетом (12.5):

$$E_2 - E_1 = A'_{1,2}, \; A'_{1,2} < 0, \; E_2 < E_1.$$

Отсюда видно, что *механическая энергия при движении точки убывает.*

Силы трения и сопротивления среды, уменьшающие или рассеивающие механическую энергию, называются *диссипативными.*

Определенный интерес представляет случай, при котором равнодействующая активных и диссипативных сил равна нулю. В таком случае $U_2 - U_1 = A'_{1,2}$, т. е. при постоянной скорости кинетическая энергия постоянна, а потенциальная убывает: $U_2 < U_1$. Благодаря постоянству скорости не изменяется и импульс тела, т. е. действие сил *не приводит к ускорениям,* а имеет *статическое проявление.* В таком случае об активных силах можно судить (соответственно измерять силы) по изменению потенциальной энергии материальной точки, по совершенной ими работе. Кроме того, сказанное означает, что такое равномерное движение материальной точки к движению изолированной свободной точки приравнивать не следует, так как в последнем случае превращения энергии не происходит.

**12.3. Инфинитное и финитное движения.** Знание полной механической энергии материальной точки позволяет высказать важные соображения о движении точки в заданном потенциальном силовом поле. Интеграл энергии запишется равенством $\frac{1}{2}mv^2 + U(x, y, z) =$

$= E =$ const, из которого скорость точки определяется как функция координат: $v = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U)}$.

Так как скорость должна быть вещественной величиной, то подрадикальное выражение не может быть отрицательным, т. е. должно быть $E - U \geqslant 0$. При $E = U$ имеем уравнение поверхности: $U(x, y, z) = E$, ограничивающей область, за пределы которой материальная точка при движении не выходит. Этот случай относится к движению в конечной области пространства или к *финитному* движению.

В случае же, если $E - U > 0$, движение не ограничено указанной областью пространства, а если размеры области бесконечны, то движение *инфинитно*.

Рассмотрим для примера движение материальной точки в поле с потенциальной энергией, выражаемой формулой (11.17). Здесь

$$E = \frac{mv^2}{2} - G\frac{mM}{r} = \text{const}.$$

Если при $r \to \infty$, $v \neq 0$, то движение инфинитное, а условие инфинитности $E \geqslant 0$. При $E < 0$ скорость обращается в нуль на конечных расстояниях от центра и движение финитное.

При финитном движении материальная точка, находясь в ограниченной области пространства, совершает либо *периодическое* движение, как, например, движение планеты по орбите вокруг Солнца, либо *квазипериодическое* движение, при котором возвращения к прежнему положению на пройденном ранее участке траектории не происходит, хотя движущаяся точка через какие-то промежутки времени и проходит вблизи прежних положений. В том и другом случае имеется *характерное время* движения, после истечения которого положения точки в пространстве либо точно, либо приблизительно повторяются. Это время носит название *периода* $T$ финитного движения. Можно считать, что для инфинитного движения $T = \infty$.

**12.4. Преобразование энергии материальной точки при переходе от одной инерциальной системы к другой.** Можно заметить, что кинетическая энергия материальной точки неинвариантна при преобразованиях Галилея, так как входящая в ее выражение скорость преобразуется по формуле $\vec{v} = \vec{v}_п + \vec{v}'$. Поэтому преобразуется и кинетическая энергия:

$$T' = \frac{mv'^2}{2} = \frac{m(\vec{v} - \vec{v}_п)^2}{2} \neq \frac{mv^2}{2}.$$

Неинвариантна и работа силы, так как преобразуются перемещения

$$d\vec{r} = \vec{v}_п dt + d\vec{r},$$

откуда по формуле для элементарной работы получаем:

$$\delta A = \delta A' + \vec{F}\vec{v}_п dt.$$

Рассмотрим вопрос, преобразуется ли потенциальная энергия материальной точки в силовом поле.

Формально потенциальная энергия в соответствии с ее определением (11.5) есть функция координат, а последние преобразуются. Однако рассмотренные примеры потенциальных сил в § 11 свидетельствуют о том, что при надлежащей нормировке потенциальная энергия оказывается инвариантом преобразований Галилея, так как зависит от некоторого инвариантного расстояния: от точки до поверхности Земли в примере 11.1; от движущейся точки до точки равновесия в примере 11.2; от материальной точки до силового центра в примере 11.3.

При изучении механики системы точек будет показано, что понятие потенциальной энергии тесно связано с механической моделью материальных объектов и дальнодействием: потенциальная энергия есть энергия взаимодействия материальных точек на некоторых расстояниях друг от друга и определяется этими расстояниями, поэтому и является инвариантной величиной.

Рассмотренная в данной главе потенциальная энергия материальной точки в силовом поле по своей природе является частью потенциальной энергии системы точек, что и объясняет ее инвариантность. Вопрос об энергии физического поля, о ее преобразовании в механике не рассматривается, потому что в механической концепции нет места полю как материальному объекту.

Пример 12.1. **Использование интеграла энергии для определения скорости материальной точки.**

Пользуясь интегралом энергии для поля некоторой потенциальной силы, можно, не прибегая к интегрированию, определить скорость движения материальной точки как функцию ее положения (координат) в пространстве. Например, для квазиупругой силы имеем интеграл:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kr^2}{2} = E,$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{kr^2}{m}}.$$

В этом движении величина $E$ всегда положительна, поэтому при любом $E$ найдется такое $r$, что $v = 0$, т. е. движение финитное. Границы области, в которой может находиться точка, определяются условием $r = \sqrt{\frac{2E}{k}}$,

а максимальная скорость будет $v = \sqrt{\frac{E}{m}}$.

Пример 12.2. **Определение скорости при (финитном) движении точки в поле силы тяготения.**

Из интеграла энергии $\frac{mv}{2} - \gamma\frac{m}{r} = E$ имеем: $v = \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2\gamma}{r}} =$ $= \sqrt{\frac{2\gamma}{r} - \frac{2|E|}{m}}$, т. е. скорость может изменяться от нулевого значения на расстоянии от центра $r = \frac{\gamma m}{|E|}$ до любого большого значения при приближении к притягивающему центру $(r \to 0)$.

Пример 12.3. **Расчет средней кинетической энергии материальной точки, участвующей в финитном движении (за большой промежуток времени).**

Умножим основное уравнение динамики (6.1) скалярно на $\vec{r}$:

$$\frac{d m\vec{v}}{dt}\vec{r} = \vec{F}\vec{r}.$$

Левая часть преобразуется с помощью легко проверяемого тождества:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}\,\vec{r}) - 2T = \vec{F}\vec{r}. \qquad (а)$$

Все величины, входящие в равенство (а), изменяются с течением времени. Усреднить их — это значит просуммировать мгновенные значения и разделить на время:

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{d}{dt}(m\vec{v}\,\vec{r})dt - 2\bar{T} = \overline{\vec{F}\vec{r}};$$

$$\frac{1}{\tau}m\vec{v}\,\vec{r}\,\Big|_0^\tau - 2\bar{T} = \overline{\vec{F}\vec{r}}.$$

Так как $\tau \to \infty$, то первый член равен 0 и

$$\bar{T} = -\frac{\overline{\vec{F}\vec{r}}}{2}. \qquad (б)$$

Величина $\frac{\overline{\vec{F}\vec{r}}}{2}$ называется вириалом силы. Итак, средняя кинетическая энергия определяется как вириал силы.

Пример 12.4. **Вывод соотношения между средней кинетической и потенциальной энергией материальной точки в потенциальном поле.**

Пользуясь формулой (б) примера 12.3 и формулой для потенциальной силы (11.4), имеем:

$$\overline{T} = \frac{1}{2}\overline{\vec{r}\,\mathrm{grad}\,U}. \qquad (в)$$

Рассмотрим поле, потенциальная энергия которого является однородной функцией $n$-й степени от координаты. По теореме Эйлера для однородных функций $\vec{r}\,\mathrm{grad}\,U = nU$. Для этих полей формула (в) принимает вид:

$$\overline{T} = \frac{n}{2}\overline{U}. \qquad (г)$$

Это важнейшее соотношение широко используется в других разделах физики. В поле квазиупругой силы

$$U = \frac{kr^2}{2} = \frac{k(x^2 + y^2 + z^2)}{2}, \text{ значит, } n = 2 \text{ и } \overline{T} = \overline{U}$$

— *средняя по времени кинетическая энергия равна средней потенциальной.*

В поле силы всемирного тяготения или кулоновской силы $n = -1$, следовательно, $\overline{T} = -\frac{\overline{U}}{2}$ — кинетическая энергия равна половине (модуля) потенциальной.

Пример 12.5. **Расчет работы гироскопической силы.** *Гироскопической* силой называется сила, линейно зависящая от скорости и перпендикулярная скорости. Магнитная составляющая силы Лоренца $\vec{F} = q[\vec{v}\,\vec{B}(\vec{r})]$ является гироскопической. Работа гироскопической силы всегда равна нулю: $\delta A = \vec{F}d\vec{r} = q[\vec{v}\,\vec{B}]\vec{v}dt = 0$, так как смешанное произведение, в которое входят два коллинеарных вектора, равно нулю.

Пример 12.6. **Расчет работы диссипативной силы.**

Диссипативной является сила, противоположная по направлению вектору скорости частицы. Это, например, сила вязкого трения: $\vec{F} = -\beta\vec{v}$. *Работа диссипативной силы всегда отрицательна.* В самом деле,

$$\delta A = -\beta\vec{v}d\vec{r} = -\beta v^2 dt.$$

Пример 12.7. **Получение кинематических уравнений из интегралов движения в случае центрально-симметричного поля.**

Для такого поля $U = U(r)$ и имеет место сохранение момента импульса, т. е. движение происходит по плоской траектории. Наиболее удобны поэтому полярные координаты. В них интеграл имеет вид:

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = E, \tag{а}$$

а интеграл момента импульса или интеграл площадей можно записать в форме

$$r^2\dot{\varphi} = C. \tag{б}$$

Исключая из уравнения (а) с помощью уравнения (б) $\dot{\varphi}$ и проводя очевидное преобразование, имеем:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2[E - U(r)]}{m} - \frac{C^2}{r^2}}.$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, т. е. оно решается с помощью взятия неопределенного интеграла:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2[E - U(r)]}{m} - \frac{C^2}{r^2}}} + t_0.$$

Полученное равенство выражает кинематический закон движения точки по траектории $r = r(t)$.

Используя уравнение (б) в виде

$$d\varphi = \frac{C}{r^2}dt$$

и подставляя в него найденное $dt$, получим:

$$\varphi = \int \frac{\frac{C}{r^2}dr}{\sqrt{\frac{2[E - U(r)]}{m} - \frac{C^2}{r^2}}} + \varphi_0,$$

что в принципе может быть сведено к уравнению $\varphi = \varphi(t)$, если $r(t)$ вычислено. Следует заметить, что вычисление интегралов в общем виде при произвольной $U(r)$ невозможно; они далеко не всегда берутся в аналитических функциях и при заданных (даже не слишком сложных) $U(r)$. Однако числовой расчет при современных средствах всегда с необходимой степенью точности можно произвести. Итак, кинематические уравнения $r = r(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$ получены.

Пример 12.8. **Получение кинематических уравнений одномерного движения под действием квазиупругой силы.** Интеграл энергии для квазиупругой силы известен:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = E.$$

Очевидное преобразование данного дифференциального уравнения придает ему вид:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{k}{m}x^2},$$

откуда

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{k}{m} x^2}} + \text{const}.$$

Отыскивая данный интеграл в таблицах неопределенных интегралов, имеем:

$$\sqrt{\frac{k}{m}}\, t = \arcsin \frac{x}{\sqrt{\frac{2E}{k}}} + \text{const},$$

откуда

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \alpha\right),$$

т. е. материальная точка испытывает гармоническое колебание с частотой $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ и амплитудой $A = \sqrt{\frac{2E}{k}}$. В данном случае $\alpha$ — начальная фаза — должна быть определена из начальных условий.

**Методические замечания** по важным понятиям динамики. «Инертность», «инерция», «движение по инерции» — эти слова часто употребляются в разговорном языке. В физике инерции и инертности придают определенный смысл. Под *инерцией* понимается явление, состоящее в том, что материальные тела при отсутствии взаимодействий сохраняют неизменным состояние движения или покоя по отношению к инерциальной системе отсчета. Если же тело участвует во взаимодействии, то инерция проявляется в том, что изменение его скорости происходит постепенно, а не мгновенно. Наряду с инерцией говорят об *инертности* как свойстве тел, обусловливающем явление инерции. (Иногда слова «инерция» и «инертность» употребляют в одном и том же смысле — они обозначают указанные выше *свойства* тел.) Масса тел есть физическая величина, характеризующая свойство инертности, мера инертности.

Движение по инерции строго не определяется. Под ним следует понимать явление инерции. Поэтому прежде всего движение по инерции — это движение в отсутствии сил. Кроме того, можно говорить, что тело по инерции продолжает движение, если активные силы отсутствуют, а кинетическая энергия тела уменьшается, рассеиваясь за счет диссипативных сил. Наконец, в случае уравновешивающейся системы сил, т. е. при равнодействующей, равной нулю, также говорят о движении по инерции.

## ГЛАВА IV. ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

В механике всегда имеют дело с системой материальных точек, взаимодействующих между собой. Однако выше рассматривалось движение одной точки системы, а остальные только создавали силовое поле, в котором и двигалась изучаемая точка. В данной главе изучается движение и взаимодействие всех точек, входящих в систему. Основные понятия и законы динамики системы получаются как обобщения изученных ранее понятий и законов динамики материальной точки.

## § 13. Основные понятия и определения. Дифференциальные уравнения движения

**13.1. Механическая система материальных точек.** *Совокупность материальных точек, между которыми имеет место силовое взаимодействие, называется механической системой материальных точек или просто механической системой.* Примером механической системы может служить Солнечная система, твердое тело — неизменяемая система точек и т. д.

Движение системы в механике определено, если известно движение каждой точки.

Система называется *свободной*, если координаты и скорости точек системы могут принимать любые значения в зависимости от сил, приложенных к ним, и начальных условий движения. Если координаты и скорости точек системы удовлетворяют некоторым условиям — связям, то система называется *несвободной*. Связи классифицируются по их аналитическому выражению так же, как и для одной материальной точки. Если связь выражается уравнением, в которое входят только координаты точек, то такая связь называется *голономной, удерживающей* и *стационарной*. Когда в уравнения связей входит время, связи называются *нестационарными*, а когда связи выражены неравенствами, они называются *неудерживающими*. Все остальные связи, уравнения которых задаются дифференциальными неинтегрируемыми уравнениями, называются *неголономными*.

**13.2. Внутренние и внешние силы. Замкнутая и изолированная системы.** Силы, действующие на точки системы, во многих случаях оказывается полезным подразделять на *внутренние* и *внешние*.

Внутренними называются силы, действующие со стороны одних точек системы и приложенные к другим точкам той же системы. Иначе, *внутренние силы — это силы взаимодействия между точками самой системы*. Как правило, внутренние силы задаются непосредственно как силы попарного взаимодействия между точками. Они зависят только от расстояния между точками, имеют центральный характер и подчиняются третьему закону Ньютона. (Понятие силового поля для внутренних сил не применяется.)

*Внешними называются силы, приложенные к точкам системы со стороны тел, не принадлежащих системе*, т. е. силы, действующие на систему, находящуюся во внешнем силовом поле.

Указанное подразделение сил на внешние и внутренние определяется выбором самой системы. Одни и те же силы могут быть в одном случае внутренними, а в другом — внешними, в зависимости от того, какие тела включаются в рассматриваемую систему.

*Система, в которой действуют только внутренние силы, называется механически замкнутой.* В такой системе рассматриваются все взаимодействующие между собой тела. Это значит, что она изолирована от внешних силовых полей. Поэтому в механике говорят о замкнутой или *изолированной* системе.

Однако понятие изолированной системы, если рассматривать не только механику, не эквивалентно замкнутой; все механически взаи-

модействующие части рассматриваемой системы могут быть учтены, но система не изолирована, так как испытывает внешнее, не механическое влияние. Например, в систему поступает энергия при нагревании; система испытывает действие внешнего поля, отнести которое к механическому взаимодействию точек нельзя, и т. д.

Внутренние силы обладают важным свойством: *геометрическая сумма векторов внутренних сил*, приложенных к точкам системы, называемая *главным вектором внутренних сил, равна нулю*. Обозначив через $\vec{F}_i'$ равнодействующую внутренних сил, приложенных к каждой $i$-й точке системы, имеем:

$$\vec{F}' = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i' = 0. \tag{13.1}$$

Это равенство следует из третьего закона Ньютона; внутренние силы сводятся к попарным взаимодействиям точек системы, и на основании формулы (5.8) геометрическая сумма сил взаимодействия равна нулю.

*Главный момент внутренних сил, действующих в системе, т. е. геометрическая сумма моментов внутренних сил, приложенных к точкам системы, относительно произвольно выбранной моментной точки, равен нулю.* Обозначим $\vec{M}_i'$ момент равнодействующей внутренних сил, приложенных к $i$-й точке системы. Запишем математическое выражение указанного свойства:

$$\vec{M}' = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i' = \sum_{i=1}^{n} [\vec{r}_i \vec{F}_i'] = 0. \tag{13.2}$$

В справедливости равенства (13.2) убеждаемся, рассматривая геометрическую сумму моментов сил взаимодействия между любой парой точек системы, которая вследствие формулы (5.8) и определения момента (§ 10) всегда будет равна нулю.

**13.3. Дифференциальные уравнения движения системы. Условия равновесия.** Напишем основные векторные уравнения динамики для $n$ точек системы:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{F}_i', \ i = 1, 2, 3, ..., n. \tag{13.3}$$

В них $\vec{F}_i$ — равнодействующая внешних сил, а $\vec{F}_i'$ — внутренних.

Получили систему из $n$ векторных уравнений. Проецирование этих уравнений на оси декартовых координат приводит к $3n$ дифференциальным скалярным уравнениям движения системы. Эти уравнения позволяют в принципе, как и в динамике точки, решать две основные задачи: определять силы по заданному движению системы и определять движение системы по заданным силам. Но на практике при решении второй задачи динамики системы возникают большие математические трудности и ее точные решения для системы из трех и более материальных точек неизвестны. Поэтому большое значение приобретают общие теоремы динамики системы, позволяющие просто

находить первые интегралы движения, а по ним делать существенные заключения о характере и особенностях движения системы в конкретных случаях.

Но в теоретическом плане уравнения (13.3) исчерпывают вопрос о движении системы точек. По координатам точек системы и их скоростям, известным в некоторый момент времени, с помощью (13.3) определяются координаты и скорости точек во все другие моменты времени. В этом проявляется детерминизм или динамическая предопределенность механического движения.

С помощью уравнений движения (13.3) можно получить условия или *уравнения равновесия* системы материальных точек, перейти от динамики к статике. В состоянии равновесия все точки системы должны покоиться, а это возможно только при отсутствии ускорений, следовательно, $\vec{F}_i + \vec{F}'_i = 0$ — *равнодействующая сил, приложенных к каждой точке, равна нулю.*

Пример 13.1. *Решение системы динамических уравнений для нескольких тел* (изображенных на рис. 13.1).

На тела действуют силы тяжести $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$, $m_3\vec{g}$, направленные вертикально вниз, нормальные силы реакции $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$, силы натяжения нитн $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ и силы трения $\vec{F}_{T_1}$ и $\vec{F}_{T_2}$. Составим уравнения движения всех тел:

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_{T_1} + m_1\vec{g} + \vec{N}_1,$$
$$m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_3 + \vec{F}_2 + \vec{F}_{T_2} + m_2\vec{g} + \vec{N}_2,$$
$$m_3\vec{a}_3 = m_3\vec{g} + \vec{F}_4.$$

Учитывая связи, заключаем, что

$$\vec{N}_1 = -m_1\vec{g},\ \vec{N}_2 = -m_2\vec{g},$$
$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2,\ \vec{F}_3 = -\vec{F}_4,\ F_{T_1} = km_1g,\ F_{T_2} = km_2g,$$

а ускорение движения по модулю одинаково для всех тел. Поэтому уравнения движения в проекциях на горизонталь и вертикаль приобретают вид:

$$m_1a = F_1 - km_1g,$$
$$m_2a = F_3 - F_1 - km_2g,$$
$$m_3a = m_3g - F_3.$$

Складывая их почленно, получаем:

$$a(m_1 + m_2 + m_3) = m_3g - kg(m_1 + m_2),$$

отсюда

$$a = \frac{g[m_3 - k(m_1 + m_2)]}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Далее нетрудно найти натяжение нитей $F_1$ и $F_3$.

Из этого решения видно, что, чем больше тел и сложнее связи, тем сложнее система уравнений и ее решение. Между тем существуют простые методы решения таких задач. Они рассмотрены в главе VI.

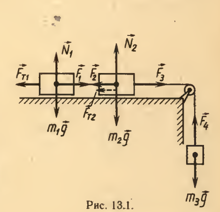


Рис. 13.1.

**13.4. Импульс системы. Центр масс.** *Импульсом системы материальных точек называется гео-*

*метрическая сумма импульсов всех точек системы,* т. е.

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i. \tag{13.4}$$

В динамике механических систем применяется понятие *центра масс,* или *центра инерции системы.* Это геометрическая точка, относительно которой масса системы по всем направлениям распределена одинаково. Радиус-вектор центра масс определяется следующей формулой:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i, \tag{13.5}$$

т. е. как среднее по массе произведений радиус-векторов точек системы на массы точек.

Здесь $m$ — масса системы, равная сумме масс всех ее точек. Пользуясь этим определением радиус-вектора центра масс, импульсу системы можно придать простой вид, для чего следует продифференцировать обе части (13.5) по времени:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{r}}_i = m\dot{\vec{r}}_c. \tag{13.6}$$

Выберем начало новой, штрихованной, системы координат в центре масс системы материальных точек, так что $\vec{r}_c' = 0$, тогда из уравнения (13.5) получаем:

$$\frac{1}{m}\sum_i m_i \vec{r}_i' = 0.$$

Отсюда следует, что в этой системе координат, называемой системой центра масс,

$$\vec{p}' = \sum \vec{p}_i' = 0 \tag{13.7}$$

*импульс системы материальных точек в системе отсчета с началом в центре масс равен нулю.*

**13.5. Момент импульса** системы. *Моментом импульса системы материальных точек называется геометрическая сумма моментов импульсов всех точек системы:*

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i [\vec{r}_i \, \vec{v}_i]. \tag{13.8}$$

Момент импульса материальной точки, как и момент силы, зависит от выбора начала координат, или моментной точки $O$. Выведем формулу, устанавливающую зависимость между моментами системы относительно двух разных точек $O$ и $O'$ (рис. 13.2). Так как $\vec{r}_i = \vec{r}_0 + \vec{r}_i'$, то с помощью формулы (13.8) имеем: $\vec{L} = \vec{L}' + [\vec{r}_0 \, \vec{p}]$, где $\vec{p}$ — импульс системы. Таким образом, момент импульса не зависит от начала только в частном случае, при $\vec{p} = 0$.

Интересен случай перехода к штрихованной системе координат, начало которой связано с центром масс системы материальных точек и которая движется поступательно в исходной нештрихованной системе. Теперь $\vec{r}_0 = \vec{r}_c$, откуда $\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}'_i$.

Поэтому в соответствии с определением импульса материальной точки

$$\vec{p}_i = m_i\dot{\vec{r}}_c + m_i\dot{\vec{r}}'_i = m_i\dot{\vec{r}}_c + \vec{p}'_i.$$

Подставляя значение $\vec{p}_i$ в формулу (13.8), имеем:

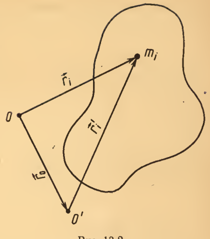



Рис. 13.2.

$$L = \sum_i[\vec{r}'_i\,\vec{p}'_i] + \sum_i[\vec{r}_c\vec{p}'_i] + \sum_i[m_i\vec{r}'_i\,\dot{\vec{r}}_c] + \sum_i m_i[\vec{r}_c\dot{\vec{r}}_c].$$

Средние члены обращаются в нуль, так как $\sum m_i r'_i = 0$ по определению центра масс, а $\sum p'_i = 0$ в соответствии с (13.7), и окончательно

$$\vec{L} = \vec{L}' + [\vec{r}_c\,\vec{p}_c]. \tag{13.9}$$

Таким образом, момент импульса произвольно движущейся системы распадется на момент, *вычисленный в системе центра масс, и момент, выражающий движение системы как целого* (материальной точки с массой $\sum m_i$, движущейся со скоростью $\dot{\vec{r}}_c$). Первое слагаемое в (13.9)

$$\vec{L}' = \sum[\vec{r}'_i\,\vec{p}'_i]$$

может быть названо *собственным моментом* системы. Заметим, что собственный момент системы не зависит от движения системы как целого и является характеристикой внутреннего движения в системе.

**13.6. Кинетическая энергия системы.** *Кинетическая энергия системы материальных точек — это сумма кинетических энергий всех точек системы:*

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2. \tag{13.10}$$

При вычислении кинетической энергии системы очень полезной оказывается теорема: *кинетическая энергия системы может быть представлена в виде суммы двух слагаемых: кинетической энергии поступательного движения системы со скоростью центра масс и кинетической энергии движения системы по отношению к центру масс* (теорема Кенига). Докажем эту теорему.

Пусть $\vec{v}_c$ — скорость движения центра масс, $\vec{v}'_i$ — скорость дви-

жения $i$-й точки по отношению к системе отсчета с началом в центре масс и движущейся поступательно в исходной системе. Тогда по закону сложения скоростей имеем:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_i', \quad v_i^2 = v_c^2 + (v_i')^2 + 2\vec{v}_c\vec{v}_i'.$$

Делаем подстановку $v_i^2$ в выражение для кинетической энергии (13.10):

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} v_c^2 \sum_{i=1}^{n} m_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i (v_i')^2 + \vec{v}_c \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i'.$$

Последнее слагаемое обращается в нуль на основании (13.7). Окончательно получаем формулу

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i (v_i')^2. \qquad (13.11)$$

Здесь первое слагаемое соответствует движению всех точек системы с одинаковыми скоростями $\vec{v}_c$, поэтому и можно назвать его кинетической энергией поступательного движения системы как целого. Второе слагаемое выражает кинетическую энергию движения материальных точек в системе, не зависящую от скорости движения центра масс.

**13.7. Потенциальная энергия системы.** В § 11 определена потенциальная энергия материальной точки. Как понятие силы, так и понятие потенциальной энергии тесно связано с механической моделью взаимодействия. В рамках этой модели материальные объекты представлены системой материальных точек, действующих друг на друга на расстоянии с некоторыми силами.

Если рассмотреть замкнутую систему материальных точек, то *энергия системы сведется к сумме энергий попарного взаимодействия, зависящих только от расстояний между точками в парах.* Утверждение о суммировании энергии непосредственно вытекает из принципа суперпозиции сил: для потенциальных сил, действующих на любую точку системы со стороны всех остальных, имеем:

$$\vec{F}_j = \sum_{i \neq j} \vec{F}_i = -\sum_{i \neq j} \text{grad}_j U_{i,j} = -\text{grad}_j \sum_{i \neq j} U_{ij},$$

$$\vec{F}_j = -\text{grad}_j U,$$

где

$$U = \sum_{i \neq j} U_{i,j}.$$

Потенциальную энергию замкнутой системы как функцию координат всех ее точек можно записать в более конкретной форме:

$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n) = \frac{1}{2}\sum\sum_{i \neq j} U_{i,j}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|). \qquad (13.12)$$

Если система незамкнута, то она рассматривается как находящаяся во внешнем (нестационарном или стационарном) поле. Для системы взаимодействующих точек в нестационарном внешнем поле

имеем общую формулу потенциальной энергии:

$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n, t) = \frac{1}{2}\sum_{i \neq j}^{n}\sum U_{i,j}(|r_i - r_j|) + \sum_{i}^{n} U_i(r_i, t). \quad (13.13)$$

Если внешнее поле стационарно, энергия от времени не зависит.

В механике рассматриваются также системы материальных точек, находящиеся в непотенциальных полях. Среди них в особый вид выделяются поля с так называемыми обобщенно-потенциальными силами, для которых вводится функция $U$, зависящая от координат и *скоростей* точек системы,— *обобщенный потенциал*. С помощью этой функции находят силы. Однако обобщенный потенциал не сводится к потенциальной энергии (обобщенно-потенциальные силы рассмотрены ниже, в § 22).

На систему могут быть наложены связи, в том числе неидеальные, а это значит, что точки системы могут испытывать действие диссипативных сил наряду с потенциальными и обобщенно-потенциальными силами. Для непотенциальных и диссипативных сил понятие потенциальной энергии неприменимо.

## § 14. Основные теоремы динамики системы. Законы сохранения

**14.1. Теорема об изменении импульса системы. Закон сохранения импульса.** Теоремы для системы материальных точек удобно получать, обобщая рассмотренные ранее соответствующие теоремы для одной материальной точки. Теорему об изменении импульса материальной точки в форме (9.1) напишем для каждой $i$-й точки системы, подразделяя силы на внутренние и внешние:

$$\frac{d}{dt} m_i\vec{v}_i = \vec{F}_i + \vec{F}_i'.$$

Просуммировав уравнения, получим:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i'.$$

Слева под знаком производной стоит импульс системы, а правая часть равенства представляет собой сумму главных векторов внешних и внутренних сил. Но главный вектор внутренних сил по формуле (13.1) равен нулю. Вводя сокращенные обозначения, полученные уравнения перепишем в виде

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F}. \quad (14.1)$$

Мы пришли к теореме об изменении импульса системы материальных точек, которую можно сформулировать так: *производная по времени импульса системы равна главному вектору внешних сил, действующих на точки системы.*

Формуле (14.1) можно придать иной вид, если импульс системы по формуле (13.6) выразить через импульс центра масс системы:

$$m\vec{a}_c = \vec{F}. \quad (14.2)$$

Формулу (14.2) называют теоремой о движении центра масс: *центр масс системы движется как точка, в которой сосредоточена*

*вся масса системы и к которой приложен главный вектор внешних сил, действующих на точки системы.*

Из (14.1) следует закон сохранения импульса системы: *если главный вектор внешних сил равен нулю, то вектор импульса системы остается постоянным:*

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = m\vec{v}_c = \text{const}. \quad (14.3)$$

Проецируя векторное равенство (14.3) на оси координат, получим *три первых интеграла движения системы:* $\dot{x}_c = C_1$, $\dot{y}_c = C_2$, $\dot{z}_c = C_3$. Эти интегралы, как и для одной материальной точки, могут существовать одновременно все три, два или один.

Для замкнутой механической системы внешние силы отсутствуют, поэтому для *замкнутых систем выполняется закон сохранения импульса.* Центр масс системы движется по инерции, т. е. равномерно и прямолинейно. (Поэтому центр масс и называют иначе *центром инерции.*)

Благодаря указанному свойству движения особое значение приобретает система отсчета с началом в центре масс. Она движется поступательно в исходной инерциальной системе и является инерциальной, а движение материальных точек в ней выглядит проще, нежели в других системах отсчета.

Внутренние силы, действующие в замкнутой системе, могут изменять относительные скорости отдельных материальных точек, но эти изменения всегда будут такими, чтобы общий импульс оставался неизменным по величине и направлению. Это неизменное значение импульса системы определяется начальными условиями движения ее точек.

**14.2. Теорема об изменении момента импульса системы. Закон сохранения момента импульса.** Теорему об изменении момента импульса для одной материальной точки мы получили в § 10 и кратко выразили уравнением (10.4). В правой части уравнения стоит сумма моментов сил, или момент равнодействующей силы, приложенной к материальной точке.

Теорему об изменении момента импульса мы можем написать для каждой точки, входящей в систему материальных точек. При этом учтем, что силы распадутся на внешние и внутренние. Если теперь ввести краткие обозначения для моментов всех сил, уравнения будут иметь вид:

$$\frac{d}{dt} m_i[\vec{r}_i\vec{v}_i] = \vec{M}_i + \vec{M}'_i.$$

Просуммировав их, получим:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i[\vec{r}_i\vec{v}_i] = \sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i + \sum_{i=1}^{n}\vec{M}'_i.$$

Слева под знаком производной стоит момент импульса системы

(13.8), а правая часть равеиства представляет главные момеиты виешних и виутреиних сил. Но главиый момеит виутреииих сил по формуле (13.2) равеи нулю, поэтому

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{M}. \qquad (14.4)$$

Мы получили теорему об измеиеиии момента импульса системы материальиых точек, которую можно сформулировать так: *производная момента импульса системы по времени равна главному моменту внешних сил, действующих на точки системы.*

Теорема об изменении момента импульса позволяет определить его условия сохранения. Закон сохраиеиия момента импульса гласит: *если геометрическая сумма моментов всех внешних сил, действующих на точки системы, равна нулю, то вектор момента импульса системы остается величиной постоянной:*

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i[\vec{r}_i\,\vec{v}_i] = \text{const}. \qquad (14.5)$$

Для замкиутых систем закон сохраиения момеита импульса всегда выполняется.

Под влиянием виутреииих сил момеиты импульса отдельиых точек или частей системы измеияются, но эти изменения обязательно компеисируются измеиениями моментов импульса других точек и частей той же системы.

Проецируя векторную запись (14.5) закоиа сохранеиия момеита импульса на оси координат, получим *три первых интеграла движения:*

$$\begin{cases} L_x = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(y_i\dot{z}_i - z_i\dot{y}_i) = C_4; \\ L_y = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(z_i\dot{x}_i - x_i\dot{z}_i) = C_5; \\ L_z = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(x_i\dot{y}_i - y_i\dot{x}_i) = C_6. \end{cases} \qquad (14.6)$$

Для незамкнутой системы, где момеит не сохраняется в целом, одиа из проекций главного момента виеших сил может обратиться в нуль. Тогда имеет место одии из первых интегралов движеиия (14.6): сохраияется та проекция момеита импульса, для которой обращается в нуль проекция главиого момента внешних сил. Например,

$$\frac{dL_x}{dt} = 0, \;\; L_x = C_4.$$

При переходе к системе центра масс момент импульса преобразуется по формуле (13.9):

$$\vec{L} = \vec{L}' + [\vec{r}_c\vec{p}_c].$$

Если система замкнута, то последняя формула выражает преобразование момента импульса при переходе от одной инерциальной системы к другой. Обе составляющие момента тогда сохраняются в отдельности.

**14.3. Теорема об изменении кинетической энергии системы. Закон сохранения полной механической энергии.** Теорему об изменении кинетической энергии для одной материальной точки мы получили в § 12. Напишем теперь уравнение (12.1) этой теоремы для каждой точки системы подробней, выделив в правой части уравнения сумму работ заданных сил и сил реакции:

$$d\left(\frac{1}{2}m_iv_i^2\right) = \vec{F}_i d\vec{r}_i + \vec{R}_i d\vec{r}_i.$$

Далее учтем, что для системы заданные силы и силы реакции связей распадаются на внешние и внутренние; покажем это в уравнении

$$d\left(\frac{1}{2}m_iv_i^2\right) = \vec{F}_i d\vec{r}_i + \vec{F}_i' d\vec{r}_i + \vec{R}_i d\vec{r}_i + \vec{R}_i' d\vec{r}_i.$$

Просуммировав почленно все $n$ уравнений системы, получим равенство

$$d\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_iv_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i' d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n}\vec{R}_i d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n}\vec{R}_i' d\vec{r}_i.$$

Под знаком дифференциала в левой части этого равенства стоит кинетическая энергия системы, а правая часть представляет собой сумму элементарных работ заданных сил и сил реакций (внешних и внутренних). Вводя сокращенные обозначения, рассматриваемое равенство перепишем в виде

$$dT = \delta A + \delta A' + \delta A_R + \delta A_R'. \qquad (14.7)$$

Мы получили теорему об изменении кинетической энергии системы материальных точек, которую можно сформулировать так: *дифференциал кинетической энергии системы равен сумме элементарных работ сил, действующих на точки системы.* При идеальных внешних связях работа внешних сил реакций равна нулю. Если и внутренние связи идеальны, то и работа внутренних сил реакций обращается в нуль. Уравнение теоремы принимает вид:

$$dT = \delta A + \delta A'. \qquad (14.8)$$

В отличие от изменения импульса и момента импульса системы при изменении энергии играют роль как внутренние, так и внешние силы — «работают» внешние силы и внутренние, в общем случае как активные, так и неидеальные реакции связей.

Теорема об изменении кинетической энергии позволяет определить условия сохранения полной механической энергии; эти условия названы в законе сохранения энергии: *если все силы, действующие на точки системы, являются потенциальными и стационарными, то полная механическая энергия системы остается величиной постоянной.* Докажем утверждение закона.

Прежде всего заметим, что речь идет либо о свободной системе, либо о системе с идеальными связями, т. е. исходим из формулы (14.8). Если заданные внешние и внутренние силы являются потенциальными и стационарными, то для каждой точки (см. § 11) выполняются условия $\delta A_i = -dU_i - dU_i'$, где $U_i'$ — потенциальная энергия точки в поле системы, а $U_i$ — во внешнем поле.

Тогда для системы материальных точек элементарная работа внешних сил может быть вычислена:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \delta A_i = -d \sum_{i=1}^{n} U_i(\vec{r}_i) = -dU(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n),$$

где $U$ — потенциальная энергия системы во внешнем силовом поле.

Внутри системы на каждую точку действуют потенциальные силы со стороны всех остальных, причем их равнодействующая находится как градиент (по координатам данной точки) от потенциальной энергии системы, определяемой формулой (13.12). Отсюда следует, что работа, совершаемая внутренними силами над $i$-й точкой, выражается формулой $\delta A_i' = -\operatorname{grad}_i U' d\vec{r}_i$. Суммируя элементарные работы по всем точкам системы, получаем:

$$\delta A' = -\sum_i \operatorname{grad}_i U' d\vec{r}_i = -dU'.$$

Найденные выражения элементарных работ подставим в уравнение теоремы об изменении энергии (14.8): $dT = -dU - dU'$, откуда и имеем:

$$d(T + U + U') = 0, \ T + U + U' = \text{const}. \qquad (14.9)$$

Мы получили *закон сохранения* полной механической энергии системы в случае потенциальных сил, причем полная механическая энергия равна сумме энергий кинетической, внешней потенциальной и внутренней потенциальной:

$$E = T + U + U'. \qquad (14.10)$$

Закон сохранения полной механической энергии (14.9) выражает *первый интеграл* движения, называемый *интегралом энергии*.

Для *замкнутой* системы с потенциальными силами (свободной или с идеальными связями) полная механическая энергия сохраняется:

$$E = T + U' = \text{const}. \qquad (14.11)$$

Кинетическая энергия системы материальных точек может быть представлена по теореме Кенига (13.11) в виде суммы энергии поступательного движения $\frac{1}{2} mv_c^2$ и энергии внутреннего движения $\frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2$. В соответствии с этим в полной механической энергии системе, определяемой формулой (14.10), можно выделить *внутреннюю механическую энергию*, представляющую собой сумму энергий

внутренней кинетической и внутренней потенциальной:

$$E_{\text{вн}} = T' + U'. \qquad (14.12)$$

Внутренняя механическая энергия системы в общем случае не сохраняется, но для замкнутой системы с потенциальными силами сохранение имеет место, так как постоянна полная энергия (14.11) и постоянна ее часть — энергия поступательного движения.

В заключение заметим, что системы с сохраняющейся полной механической энергией называются *консервативными.*

Пример 14.1. **Применение закона сохранения импульса для вывода уравнения движения материальной точки переменной массы.**

Основной принцип реактивного движения общеизвестен: в реактивном двигателе сгорает топливо и продукты горения с большой относительной скоростью выбрасываются назад, а сам двигатель при этом отталкивается вперед. Однако непосредственное применение законов Ньютона в задаче о движении ракеты при определении ее кинематических параметров приводит к неразрешимой проблеме многих тел. Используем для составления уравнения движения ракеты законы изменения и сохранения импульса.

При движении ракеты ее масса убывает и ракету можно рассматривать как материальную точку переменной массы, на которую действует реактивная сила, являющаяся результатом взаимодействия ракеты с выбрасываемыми газами. Допустим, $M(t)$ — масса точки, являющаяся непрерывной (убывающей) функцией времени. Пусть за $dt$ секунд точка испускает частицу бесконечно малой массы $-dM > 0$ со скоростью $\vec{U}$ по отношению к неподвижной системе координат. Ввиду того что испускание частицы представляет процесс, при котором возникают только внутренние силы в системе точка — испущенная частица, общий импульс системы при этом не изменяется. Импульс системы до испускания $M\vec{v}$, где $\vec{v}$ — скорость ракеты до испускания частицы. После испускания импульс системы будет равен: $-dM\vec{u} + (M + dM)(\vec{v} + d\vec{v})$. Приравнивая эти выражения импульса, по закону сохранения получаем: $M\vec{v} = (M + dM)(\vec{v} + d\vec{v}) - \vec{u}dM$.

Бесконечно малой величиной второго порядка малости $dMd\vec{v}$ пренебрегаем и приходим к равенству $Md\vec{v} = dM(\vec{u} - \vec{v})$.

После деления обеих частей равенства на элемент времени получаем уравнение:

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dM}{dt}(\vec{u} - \vec{v}).$$

Сравнение последнего уравнения с основным уравнением динамики материальной точки (вторым законом Ньютона) позволяет рассматривать правую часть его как выражение реактивной силы, приложенной к точке переменной массы. Заметим, что разность $(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{v}_r$ есть скорость истечения газов относительно ракеты, т. е. реактивная сила выражается формулой:

$$\vec{\Phi}_r = \frac{dM}{dt}\vec{v}_r.$$

Если на точку переменной массы действует еще некоторая внешняя сила $\vec{F}$, то ее следует добавить к правой части уравнения, и тогда приходим к уравнению Мещерского:

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{\Phi}_r,$$

которое выражает основной закон движения точки переменной массы.

Пример 14.2. **Применение уравнения Мещерского в задаче Циолковского.**

Пусть точка переменной массы (ракета) движется в безвоздушном пространстве под влиянием только реактивной силы, причем относительная скорость истечения

частиц постоянна и направлена противоположно скорости $\vec{v}$ ракеты. Требуется определить скорость $v$ и пройденное точкой расстояние. Такова задача Циолковского.

Дифференциальное уравнение, выведенное в предыдущем примере, в данном случае запишется следующим образом:

$$M\frac{dv}{dt} = -\,v_r\frac{dM}{dt}.$$

После разделения переменных имеем:

$$\frac{dv}{v_r} = -\frac{dM}{M}.$$

Если зависимость массы точки от времени известна: $M = M_0 f(t)$, то можно дифференциальное уравнение проинтегрировать; получаем: $v = -\,v_r \ln f + C_1$. Пусть начальные условия таковы: $v\,|_{t=0} = v_0$, $f_{t=0} = 1$. Тогда закон изменения скорости выражается формулой

$$v = v_0 - v_r \ln f = v_0 + v_r \ln\frac{M_0}{M}.$$

Так как запас топлива в ракете ограничен, то процесс выбрасывания частиц продолжается в течение конечного промежутка времени на участке траектории, называемом активным. Определим скорость в конце активного участка.

Обозначим $m$ массу топлива и $M_s$ массу ракеты, т. е. $M_0 = M_s + m$. Тогда для скорости в конце активного участка при начальной $v_0 = 0$ получим следующее выражение:

$$v_1 = v_r \ln\left(\frac{M_s + m}{M_s}\right) = v_r \ln\left(1 + \frac{m}{M_s}\right).$$

Отсюда следуют важные выводы: скорость точки в конце активного участка пропорциональна относительной скорости выбрасывания частиц; скорость точки в конце активного участка возрастает при увеличении отношения массы топлива к массе ракеты (это отношение называют числом Циолковского); скорость точки в конце активного участка не зависит от скорости горения топлива.

Пример 14.3. **Упругое соударение двух частиц.**

При упругом соударении сохраняются импульс и энергия системы. Рассмотрим столкновение частиц. Задача состоит в нахождении скоростей после столкновения по известным скоростям до столкновения. Проще всего рассматривать столкновение частиц в системе координат, где центр масс соударяющихся частиц покоится.

Пусть массы частиц $m_1$ и $m_2$, их скорости в некоторой системе координат (неподвижной, лабораторной) до столкновения равны $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Тогда центр масс частиц в этой системе движется со скоростью

$$\vec{v}_c = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Скорости частиц до столкновения в системе координат, в которой центр масс покоится, можно найти, если из скоростей в лабораторной системе вычесть скорость центра масс. Обозначим скорости частиц относительно центра масс до столкновения соответственно $\vec{v}_{0,1}$ и $\vec{v}_{0,2}$. Для них имеем следующие выражения:

$$\vec{v}_{0,1} = \vec{v}_1 - \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2),$$

$$\vec{v}_{0,2} = \vec{v}_2 - \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{-\,m_1}{m_1 + m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2).$$

Как и следовало ожидать, величины относительных скоростей обратно пропорциональны массам частиц, а направления их прямо противоположны (в системе центра масс импульс системы двух частей равен нулю). После столкновения скорости, изменив направления, останутся противоположными. При упругом столкновении сохраняется кинетическая энергия, поэтому не изменяются и абсолютные величины относительных скоростей. Обозначим через $\vec{n}$ единичный вектор в направлении скорости первой частицы после столкновения. Тогда относительные скорости частиц после

столкновения будут иметь следующие значения:

$$\vec{v}'_{0,1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \vec{n}, \quad \vec{v}'_{0,2} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \vec{n}.$$

Для получения скоростей частиц после столкновения в лабораторной системе координат к этим выражениям нужно добавить скорость центра масс. Таким образом, получаем окончательные выражения для скоростей частиц после столкновения:

$$\vec{v}'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \vec{n} + \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2},$$

$$\vec{v}'_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \vec{n} + \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Задача решена — скорости частиц после столкновения найдены. Однако ответ многозначен, так как направление вектора $\vec{n}$ не определяется из законов сохранения, оно зависит от закона взаимодействия частиц и их взаимного расположения во время столкновения.

Пример 14.4. **Работа при механическом ударе.**

Умножим почленно основное уравнение удара (пример 9.1) на $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_1$ и получим:

$$m v_2^2 - m\vec{v}_1\vec{v}_2 = \vec{K}\vec{v}_2, \quad m\vec{v}_2\vec{v}_1 - m v_1^2 = \vec{K}\vec{v}_1.$$

Суммируя полученные равенства почленно и применяя теорему об изменении кинетической энергии, найдем работу, совершаемую при ударе:

$$A = \frac{m v_2^2}{2} - \frac{m v_1^2}{2} = \vec{K}\,\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}.$$

Итак, работа, совершаемая при ударе, равна скалярному произведению ударного импульса на полусумму начальной и конечной скоростей.

## § 15. Задача двух тел

**15.1. Приведенная масса.** Ранее (§ 13) рассматривались уравнения динамики системы материальных точек. При этом указывалось, что решение их встречает для многих точек непреодолимые математические трудности. Действительно, точного решения системы уравнений (13.3) для произвольных сил не найдено уже в случае трех материальных точек, поэтому важна задача о замкнутой системе двух точек, называемая задачей двух тел. Она имеет простое и исчерпывающее решение — сводится к основной задаче динамики одной материальной точки. Решение задачи двух тел используется в небесной механике, описывающей движение планет и их спутников в Солнечной системе, в задачах на столкновение частиц, в статистической физике и других вопросах.

Рассмотрим замкнутую систему двух материальных точек, взаимодействующих между собой. Как было установлено (§ 14), центр масс этой системы движется равномерно и прямолинейно (или покоится). Задача просто решается в системе с началом в центре масс, движущейся поступательно (такая система называется Ц-системой).

Обозначим массы частиц через $m_1$ и $m_2$, их радиус-векторы, проведенные от центра масс, соответственно $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ (рис. 15.1). Пусть $\vec{r}$ — вектор, проведенный от точки $m_2$ к $m_1$. Из определения радиус-вектора центра масс имеем: $m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0$.

Непосредственно из рнсунка следует соотношение между раднус-векторами:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_2 + \vec{r}. \qquad (15.1)$$

Рис. 15.1.

Два последннх равенства позволяют выразить радиус-векторы $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ через вектор $\vec{r}$, соединяющнй точки $m_2$ и $m_1$. Имеем:

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}, \ \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}. \qquad (15.2)$$

Напншем теперь основные уравнення для движения обеих точек в Ц-системе:

$$\begin{cases} m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{2,1}(r), \\ m_2\ddot{\vec{r}}_2 = F_{1,2}(r). \end{cases} \qquad (15.3)$$

Но пока что мы значительно не продвинулнсь в решеннн задачи двух тел, так как силы в уравненнях (15.3) зависят от расстояния между точками, а не от расстояння до центра масс, т. е. решать уравнения (15.1) отдельно для каждой точки нельзя. Однако именно в задаче двух тел эти трудности устраняются.

Пользуясь вышенапнсанными выражениями для радиус-векторов (15.2), нсключим из основных уравнений (15.3) $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$. Получаем уравнения движения:

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{2,1}(r),$$

$$-\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{1,2}(r).$$

Ввнду того что по третьему закону Ньютона $\vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2}$, оба уравнения становятся тождественными, н движение системы двух точек в результате их взанмодействия эквивалентно движению одной точкн в соответствии с уравнением

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(r). \qquad (15.4)$$

Уравнение (15.4) отличается от нзвестного уравнення движения материальной точкн в поле заданной силы (6.1) только тем, что вместо массы $m$ здесь выступает комбинация масс двух точек:

$$m' = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \qquad (15.5)$$

Величина $m'$ называется *приведенной массой*.

Итак, задача двух тел свелась к задаче о движении одной материальной точки с приведенной массой в Ц-снстеме под действием центральной силы; уравнение движения нмеет обычный вид:

$$m'\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(r). \qquad (15.6)$$

Но при использовании результатов решения уравнения (15.6) необходимо помнить, что точка $m'$, движущаяся на конце радиус-вектора $\vec{r}$ под действием силового центра в начале координат Ц-системы, является не реальной, а изображающей движение системы. От ее движения, после того как уравнение (15.6) проинтегрировано, следует переходить к реальному движению двух материальных точек $m_1$ и $m_2$.

**15.2. Движение двух материальных точек в системе центра масс.** Движение изображающей точки в соответствии с уравнением (15.6) будет плоским, так как сила центральная (§ 10.3). Пусть кинематическое уравнение движения найдено: $\vec{r} = \vec{r}(t)$. В таком случае с помощью формулы (15.2) находим и кинематические уравнения движения обеих материальных точек в Ц-системе:

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}(t),\ \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}(t). \tag{15.7}$$

Очевидно, что траектории движения изображающей точки и точек $m_1$ и $m_2$ будут подобными кривыми относительно центра масс, а отношение подобия есть обратное отношение масс, т. е.

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}. \tag{15.8}$$

Нетрудно найти и скорости движения точек. Дифференцируя (15.7) по времени, имеем:

$$\vec{v}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v};\ \vec{v}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}. \tag{15.9}$$

Задача двух тел решена.

Пример 15.1. **Движение тел одинаковой массы.** Траектория движения изображающей точки есть окружность. Поскольку в этом случае

$$m' = \frac{m}{2},\ \vec{r}_1 = -\vec{r}_2 = \frac{\vec{r}}{2},\ \vec{v}_1 = -\vec{v}_2 = \frac{\vec{v}}{2},$$

то картина движения материальных точек и изображающей точки соответствует рисунку 15.2.

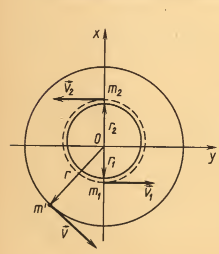
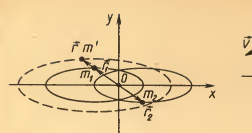



Рис. 15.2.

Пример 15.2. **Движение точек по эллиптическим орбитам.** При одинаковых массах $m_1 = m_2$ и различных, т. е. $m_2 > m_1$, траектории движения показаны на рисунках 15.3 и 15.4.

Пример 15.3. **Перевод решения задачи двух тел в лабораторную систему.** Пусть скорость движения центра масс замкнутой системы двух материальных точек известна в некоторой неподвижной системе координат — лабораторной. В таком случае, решив задачу в Ц-системе, все результаты можно перевести в Л-систему. По формулам (3.1) и (3.6) имеем:

$$\vec{r}_1(t) = \vec{v}_0 t + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}(t),$$



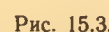



Рис. 15.3.

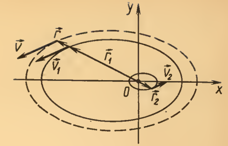



Рис. 15.4.

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v};\ \vec{r}_2(t) = \vec{v}_0 t - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}(t),\ \vec{v}_2 = \vec{v}_0 - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}.$$

П р и м е р 15.4. **Энергия замкнутой системы (консервативной) двух точек.** Кинетическая энергия системы может быть преобразована к энергии изображающей точки. Используя формулу (15.9), получаем:

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_1v_2^2}{2} = \frac{m_1m_2^2v^2}{2(m_1+m_2)^2} + \frac{m_1^2m_2v^2}{2(m_1+m_2)} = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}v^2 = \frac{m'v^2}{2}.$$

Таким образом, полная энергия системы будет

$$E = \frac{m'v^2}{2} + U(r).$$

Она выражается через приведенную массу системы.

П р и м е р 15.5. **Момент импульса системы двух точек.** Запишем момент импульса системы:

$$\vec{L} = m_1[\vec{r}_1\vec{v}_1] + m_2[\vec{r}_2\vec{v}_2].$$

Внесем сюда выражения $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ через вектор $\vec{r}$, выражающийся формулой (15.7), и получим равенство

$$\vec{L} = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}[\vec{r}\,\vec{v}_1] - \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}[\vec{r}\,\vec{v}_2] = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}[\vec{r}[\vec{v}_1 - \vec{v}_2]].$$

Но вектор $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ есть скорость $\vec{v}'$ первой частицы относительно второй или скорость изображающей точки $\vec{v}$, и окончательный результат выражается равенством

$$\vec{L} = m'[\vec{r}\,\vec{v}].$$

Это собственный момент; он сохраняется.

Из приведенных примеров видно, как задача о движении двух тел сводится к задаче о движении одной точки под действием заданной силы. Особую роль при этом играет приведенная масса системы, через нее выражаются и основные динамические параметры системы — энергия, импульс, момент импульса.

## ГЛАВА V. ОСНОВЫ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Под *абсолютно твердым* телом в механике понимают *систему, состоящую из материальных точек с неизменными расстояниями между ними.* При моделировании реальных тел такой системой точек конечный объем тела $V$ разбивается на элементарные объемы $dV$, а все тело мысленно — на совокупность бесконечно малых тел (мате-

риальных точек) с массами $dm = \rho dV$, где $\rho$ — плотность тела. Таким образом, твердое тело рассматривается как непрерывная система материальных точек, число которых бесконечно в конечном объеме тела.

Каких-либо предположений о структуре тела, взаимодействии частиц тела между собой не делается, кроме одного: расстояния между двумя любыми точками тела не изменяются, как бы ни двигалось тело и какие бы силы на него ни действовали. Это означает сохранение его формы и размеров, т. е. полное отсутствие деформаций.

Известно, что реальные твердые тела деформируются. Использование модели абсолютно твердого тела исключает рассмотрение деформаций реальных тел в данном разделе механики.

Любое реальное твердое тело состоит из атомов и молекул, взаимодействующих между собой и движущихся определенным образом. Этим взаимодействием и движением в конечном счете определяются все свойства тела — плотность, твердость, упругость, прочность, сохранение неизменной формы тела. В модели твердого тела не учитывают все другие свойства реального тела, кроме абсолютизированной неизменности форм — жесткости тела и плотности его.

О неизменности расстояний между точками в твердом теле можно говорить как о связях жесткости, наложенных на точки, ограничивающих число степеней свободы тела до шести (§ 2). Однако понятие связи здесь в полной мере не применяется, так как реакции этих связей не рассматриваются.

В данной теме изучается динамика твердого тела, где применяются общие теоремы динамики системы точек к частному случаю системы с неизменными расстояниями между точками, устанавливаются законы движения, характерные для тела. При изучении главы необходимо опираться на кинематику движения твердого тела, изложенную в курсе ранее.

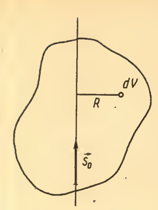
## § 16. Момент инерции

**16.1. Момент инерции. Теорема Штейнера.** В вопросах динамики важную роль играют инертные свойства тел. При поступательном движении инертные свойства тела полностью определяются массой тела. Для вращательного движения самое существенное значение имеет распределение массы по объему твердого тела. Инертные свойства твердого тела во вращательном движении определяются новой величиной — моментом инерции. *Моментом инерции $I_s$ тела относительно оси $s$ называют сумму произведений отдельных элементов $dm$ массы тела на квадраты их расстояний до оси* (рис. 16.1):

$$I_s = \int_V R^2 dm = \int_V R^2 \rho dV, \qquad (16.1)$$

где $\rho$ — объемная плотность тела.

По теореме о среднем из интегрального исчисления для момента



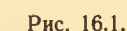



Рис. 16.1.

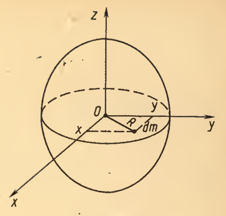



Рис. 16.2.

инерции можно написать после вынесения из-под знака интеграла среднего значения подынтегральной функции следующее выражение:

$$I_s = \overline{R}^2 \int\limits_V dm = \overline{R}^2 m. \qquad (16.2)$$

Среднее значение квадратов расстояний элементов массы до данной оси называют *квадратом плеча* или *радиусом инерции тела*.

Моменты инерции тела относительно осей произвольно выбранной декартовой системы координат (рис. 16.2) соответственно обозначим $I_{xx} = I_{11}$; $I_{yy} = I_{22}$; $I_{zz} = I_{33}$. Они имеют выражения

$$\left\{\begin{aligned} I_{xx} &= \int\limits_V (y^2 + z^2)\,dm, \\ I_{yy} &= \int\limits_V (z^2 + x^2)\,dm, \\ I_{zz} &= \int\limits_V (x^2 + y^2)\,dm. \end{aligned}\right. \qquad (16.3)$$

Отметим следующие свойства моментов инерции тела относительно координатных осей.

Сумма моментов инерции относительно каких-либо двух осей больше момента инерции относительно третьей оси: $I_{xx} + I_{yy} - I_{zz} \geqslant 0$. Действительно,

$$I_{xx} + I_{yy} - I_{zz} = \int\limits_V 2z^2\,dm \geqslant 0.$$

Если изобразить величины моментов инерции тела относительно координатных осей отрезками прямых соответствующей длины, то из них можно построить треугольник.

Сумма моментов инерции тела относительно любых трех взаимно перпендикулярных прямых, проходящих через данную точку, есть величина постоянная, не зависящая от направления прямых. В самом деле,

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2\int\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\,dm = 2H,$$

где величииа

$$H = \int_V (x_2 + y^2 + z^2)\, dm$$

иазывается *полярным моментом инерции* тела относительно иачала координат и является постояииой.

Из приведеиных определений следует, что момент иерции зависит от выбора оси, по отношеиию к которой он берется. Исследуем, как измеияется момеит иерции тела при измеиении положения оси.

Связь между моментами иерции относительно параллельиых осей устаиавливается теоремой Штейиера: *момент инерции тела $I_s$ относительно данной оси равен моменту инерции $I_c$ относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями*, что выражается равенством

$$I_s = I_c + md^2. \tag{16.4}$$

Для доказательства совместим ось $Oz$ с осью $s$, а ось $Ox$ направим так, чтобы оиа пересекала параллельную ось, проходящую через центр масс (рис. 16.3). Обозначим $R$ и $R_c$ — расстояния от какого-либо элемеита массы $dm$ соответствеино до оси $s$ и оси, проходящей через цеитр масс. По определеиию имеем:

$$I_s = \int_V R^2 dm,$$

$$I_c = \int_V R_c^2 dm.$$

Из косоугольиого треугольиика имеем:

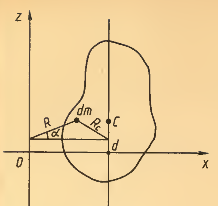
$$R_c^2 = R^2 + d - 2d\,R\cos\alpha.$$

Делаем подстаиовку в выражеиие $I_c$ и получаем: $I_c = I_s + md^2 - 2d\int_V x dm$.

По определеиию координат цеитра масс твердого тела как иепрерывиой системы точек $dm$ с помощью формулы (13.5) имеем: $\int_V x dm = mx_c$. Окоичательио получаем: $I_c = I_s + md^2 - 2md^2$, $I_s = I_c + md^2$.

Теорема доказаиа. На осиовании теоремы Штейиера заключаем, что моменты иерции тела отиосительно осей, проходящих через центр масс, являются *наименьшими* по сравиению с момеитами отиосительио других, параллельиых им осей.

**16.2. Зависимость момента иерции от иаправления оси.** Переходим к изучеиию зависимости момеита инерции тела отиосительио оси, проходящей через задаиную точку тела, от иаправления оси. Помещаем в даиной точке начало координат прямоугольиой декартовой системы. Тогда положение оси определяется зиачеииями ее трех иаправляющих косинусов, которые обозиачим соответствеино



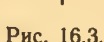



Рис. 16.3.

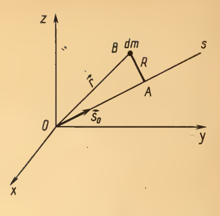



Рис. 16.4.

$\alpha$, $\beta$ и $\gamma$. Задача состоит в нахождении момента инерции $I_s$ как функции направляющих косинусов. Из треугольника $OAB$ (рис. 16.4) для квадрата расстояния элемента массы $dm$ от оси $Os$ имеем следующее выражение: $R^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (OA)^2$, где $OA$ — проекция радиус-вектора элемента массы $dm$ на направление оси $Os$. Представив радиус-вектор разложением по ортам, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, и проецируя полученную векторную сумму на $Os$, получим: $OA = x\alpha + y\beta + z\gamma$.

Производим дальнейшие тождественные преобразования выражения для квадрата расстояния $R^2$:

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x\alpha + y\beta + z\gamma)^2 = (y^2 + z^2)\alpha^2 + (x^2 + z^2)\beta^2 + (x^2 + y^2)\gamma^2 - 2yz\beta\gamma - 2xz\alpha\gamma - 2xy\alpha\beta.$$

При преобразовании использовано условие, которому удовлетворяют направляющие косинусы: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Вносим найденное выражение квадрата расстояния $R^2$ в выражение момента инерции и получаем:

$$I_s(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha^2\int_V (y^2 + z^2)\,dm + \beta^2\int_V (x^2 + z^2)\,dm + \gamma^2\int_V (x^2 + y^2)\,dm - 2\beta\gamma\int_V yz\,dm - 2\alpha\gamma\int_V xz\,dm - 2\alpha\beta\int_V xy\,dm.$$

Коэффициенты при квадратах направляющих косинусов — моменты инерции тела относительно координатных осей. Постоянные величины

$$I_{2,3} = I_{y,z} = -\int_V yz\,dm;\quad I_{1,3} = I_{x,z} = -\int_V xz\,dm;$$

$$I_{1,2} = I_{xy} = -\int_V xy\,dm$$

имеют одинаковую с моментами инерции размерность. Они получили

название *произведений инерции* тела или *центробежных моментов* инерции. Окончательный результат оказывается следующим:

$$I_s = I_{1,1}\alpha^2 + I_{2,2}\beta^2 + I_{3,3}\gamma^2 + 2I_{2,3}\beta\gamma + 2I_{1,3}\alpha\gamma + 2I_{1,2}\alpha\beta. \quad (16.5)$$

Момент инерции является однородной квадратичной функцией направляющих косинусов оси. Формула (16.5) позволяет определить его относительно любой оси, проходящей через заданную точку, если известны все шесть величин $I_{i,k}(i,\ k = 1,\ 2,\ 3)$. Эти величины играют роль своеобразных составляющих момента инерции в данной системе координат. Отсюда следует, что, не являясь вектором, эта величина не является и скаляром. Она принадлежит к *тензорным* величинам.

Для нахождения зависимости момента инерции тела от направления оси, проходящей через некоторую точку $O$, выполним следующее мысленное построение. От точки $O$ по оси $Os$, момент инерции относительно которой равен $I_s$, отложим отрезок прямой длиной

$$r = \frac{1}{\sqrt{I_s}} \quad (16.6)$$

и найдем геометрическое место концов этих отрезков, отложенных по всевозможным направлениям. Замечая, что координаты конца отрезка выражаются через направляющие косинусы равенствами $x = r\alpha$, $y = r\beta$, $z = r\gamma$, после подстановки в формулу (16.6) значения момента инерции из (16.5) получаем уравнение геометрического места точек:

$$I_s r^2 = I_{xx}x^2 + I_{yy}y^2 + I_{zz}z^2 + 2I_{yz}yz + \\ + 2I_{zz}zz + 2I_{xy}xy = 1.$$

Это уравнение второго порядка может быть только уравнением эллипсоида, так как в соответствии с (16.6) у поверхности нет бесконечно удаленной точки. Полученный эллипсоид инерции дает наглядное представление о значениях моментов инерции тела для различных осей, проходящих через точку $O$ (рис. 16.5). Отметим еще раз, что коэффициентами в уравнении эллипсоида служат моменты и произведения инерции тела относительно осей координатной системы, в которой записано уравнение. Отсутствие в уравнении линейных членов указывает, что начало координат совпадает с центром эллипсоида. Наличие в уравнении членов с произведениями координат обусловлено несовпадением осей с полуосями эллипсоида. Если произвести преобразование координат, повернув оси координат до совпадения с полуосями эллипсоида, коэффициенты при произведениях координат обратятся в нули и каноническое уравнение эллип-

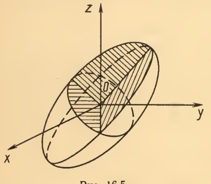


Рис. 16.5.

соида по отношению к этим осям будет иметь вид:

$$I_{x'x'}x'^2 + I_{y'y'}y'^2 + I_{z'z'}z'^2 = 1.$$

Коэффициенты $I_{x'x'}$, $I_{y'y'}$, $I_{z'z'}$ — моменты инерции тела по отношению к новым осям координат $x'$, $y'$, $z'$. Оси симметрии эллипсоида инерции называются *главными осями инерции* тела для данной точки. *Главные оси инерции — это три взаимно перпендикулярных направления, проходящие через данную точку, относительно которых моменты инерции тела имеют экстремальные значения* (минимальное для направления большой оси эллипсоида, максимальное — для малой оси и минимум-максимум — для средней оси).

Итак, по отношению к главным осям инерции произведения инерции обращаются в нули. Если $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ есть направляющие косинусы оси по отношению к главным осям инерции для данной точки, то момент инерции будет выражаться через главные моменты простейшим образом:

$$I_s = I_{xx}\alpha^2 + I_{yy}\beta^2 + I_{zz}\gamma^2. \tag{16.7}$$

Главные оси инерции и главные моменты инерции для центра масс называются соответственно главными *центральными* осями и моментами инерции тела. Главные центральные моменты могут обозначаться соответственно

$$I_{xx} = I_1;\ I_{yy} = I_2;\ I_{zz} = I_3.$$

В дальнейшем в нашем курсе мы будем иметь дело с моментами инерции и центробежными моментами инерции для ортогональных осей с началом координат в *центре инерции тела*.

Вернемся к обозначениям моментов цифровыми индексами и запишем компоненты центрального тензора инерции в следующей таблице:

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} I_{1,1} & I_{1,2} & I_{1,3} \\ I_{2,1} & I_{2,2} & I_{2,3} \\ I_{3,1} & I_{3,2} & I_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Тензор инерции является симметричным тензором второго ранга. Он имеет шесть различных компонентов. По главной диагонали располагаются моменты инерции относительно координатных осей. Поворотом координатных осей до совпадения с главными центральными осями инерции тензор приводится к диагональному виду. Остаются только компоненты по главной диагонали $I_1$, $I_2$ и $I_3$, которые в этом случае являются *главными центральными* моментами инерции, а центробежные моменты инерции обращаются в нули:

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}.$$

Момент инерции тела относительно любой оси вычисляется по формуле (16.7) и теореме Штейнера (16.4).

Тело, у которого все три главных центральных момента инерции различны, называют *асимметричным волчком*, если же два момента инерции одинаковы — *симметричным волчком*, одинаковы три — *шаровым*. Названия происходят от форм эллипсоидов инерции.

Пример 16.1. **Вычисление момента инерции однородного стержня.**

Длину стержня обозначим $l$. Начало координат совместим с центром масс. Выделим элемент длины $dx$. Обозначим линейную плотность стержня $\delta$. Вычислим момент инерции стержня относительно оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной стержню:

$$I_c = \int_V R^2 dm = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \delta dx = \frac{1}{12} ml^2,$$

где $m$ — масса стержня.

Момент инерции этого стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец $A$, найдем по теореме Штейнера, т. е.

$$I_s = I_c + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} ml^2.$$

Пример 16.2. **Вычисление момента инерции однородного обода.**

Имеем тонкий однородный обод с радиусом $R$ и с массой $m$. Разбивая его на точечные массы $dm$, найдем его момент инерции относительно оси симметрии:

$$I_c = \int_V R^2 dm = mR^2.$$

Этот результат легко распространить на тонкостенный цилиндр. Применяя теорему Штейнера, найдем момент инерции относительно образующей цилиндра:

$$I_s = I_c + mR^2 = 2mR^2.$$

Пример 16.3. **Вычисление момента инерции однородного диска.**

Имеем тонкий однородный диск с радиусом $R$ и с массой $m$. Разобьем его на точечные элементы массой $dm$, положение которых определяется полярными координатами $r$ и $\varphi$. Пусть поверхностная плотность массы — $\delta$. Тогда $dm = \delta r d\varphi dr$. Найдем момент инерции диска относительно оси симметрии: $I_c = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \delta r d\varphi dr = \frac{1}{2} mR^2$.

Представляя однородный прямой круговой цилиндр как набор тонких дисков, получим аналогичный результат. Для оси, совпадающей с одной из образующих цилиндра, по теореме Штейнера имеем: $I_s = I_c + mR^2 = \frac{3}{2} mR^2$.

Пример 16.4. **Вычисление момента инерции однородного шара.**

Вычислим сначала полярный момент инерции однородного шара по формуле

$$H = \int_V (x^2 + y^2 + z^2)\, dm = \int_V r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV.$$

Если в качестве элементарного объема $dV$ выбрать сферический слой толщиной $dr$ и радиусом $r$, то $H = \int_0^R \rho r^2 4\pi r^2 dr = \frac{4}{5} \pi \rho R^5$.

Вводя массу шара $m = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$, имеем также для полярного момента инерции выражение $H = \frac{3}{5} mR^2$.

Далее заметим, что моменты инерции шара относительно любой оси, проходящей через его центр, одинаковы. Поэтому с помощью формулы $I_1 + I_2 + I_3 = 2H$ получаем значение момента инерции шара относительно оси, проходящей через центр: $I_c = \frac{2H}{3} = \frac{2}{5} mR^2$.

## § 17. Динамика твердого тела

**17.1. Движение центра масс и поступательное движение.** В § 2 рассматривалась кинематика движения твердого тела. Там было установлено, что в общем случае движение может быть представлено как совокупность поступательного движения тела со скоростью некоторой его точки — полюса и вращения твердого тела вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс. В данном параграфе рассматривается движение твердого тела под действием приложенных к нему сил. Мы будем стремиться представить движение как совокупность поступательного движения и вращательного.

Для твердого тела справедлива теорема о движении центра масс системы (§ 14), выражающаяся формулой

$$m\vec{a}_c = \vec{F}. \tag{17.1}$$

Теперь ее можно сформулировать так: центр масс твердого тела движется как точка, в которой сосредоточена масса всего тела, а к ней приложен главный вектор сил, действующих на твердое тело.

Таким образом, в твердом теле выделяется точка — центр масс, координаты которой определяются формулами (13.5):

$$x_c = \frac{1}{m}\int\limits_V \rho x dV, \ y_c = \frac{1}{m}\int\limits_V \rho y dV, \ z_c = \frac{1}{m}\int\limits_V \rho z dV,$$

где $\rho(x, y, z)$ — плотность тела.

Центр масс движется в соответствии с уравнением (17.1). В проекциях на неподвижные оси координат $Oxyz$ (см. рис. 2.1) имеем уравнения движения центра масс: $m\ddot{x}_c = F_x$, $m\ddot{y}_c = F_y$, $m\ddot{z}_c = F_z$. Данные уравнения полностью исчерпывают задачу о движении твердого тела в случае поступательного движения. Последнее будет иметь место, если система сил, приложенных к твердому телу, сводится к равнодействующей силе, проходящей через центр масс, а в начальный момент времени вращение тела отсутствует. Инертные свойства тела при поступательном движении полностью характеризуются массой тела.

Если главный вектор сил $\vec{F} = 0$, то имеются интегралы движения: $\dot{x}_c = C_1$, $\dot{y}_c = C_2$, $\dot{z}_c = C_3$.

Вторая задача динамики для поступательного движения твердого тела оказывается совпадающей со второй задачей динамики материальной точки. Но в общем случае, кроме движения центра масс, будет иметь место вращение твердого тела. Поскольку движение твердого тела всегда можно разложить на поступательное и вращательное (§ 2), то вращение следует рассматривать в системе, центр которой помещен в центре масс, а оси остаются параллельными самим себе, т. е. система движется поступательно. В общем случае пространственная система сил, приложенных к твердому телу, приводится не к одной равнодействующей, а к равнодействующей силе, равной главному вектору системы $\vec{F}$, и к равнодействующей паре, равной главному моменту системы $\vec{M}$. Для определения характера

движения твердого тела и для разложения его на поступательное и вращательное следует выбрать в качестве точки приложения равнодействующей силы — центра приведения сил — центр масс тела. После приведения система сводится к равнодействующей силе $\vec{F}$ и паре с моментом $\vec{M}$. Возможны следующие частные случаи:

$\vec{F} \neq 0$, $\vec{M} = 0$; тело движется поступательно, если в начальный момент времени оно не имело вращения вокруг оси, проходящей через центр масс. (Если тело обладало в начальный момент времени угловой скоростью, то она сохраняется.)

$\vec{F} = 0$, $M \neq 0$; тело вращается с угловым ускорением вокруг мгновенной оси, проходящей через центр масс, а центр масс покоится или движется с постоянной скоростью.

$F \neq 0$, $M \neq 0$; центр масс движется ускоренно и тело вращается с угловым ускорением вокруг центра масс.

Таким образом, при указанном выборе системы остается изучить вращение тела в ней.

**17.2. Выражения для момента импульса твердого тела.** Момент импульса твердого тела получим из выражения (13.8) для произвольной системы материальных точек путем предельного перехода к интегрированию по объему тела: $L = \int_V [\vec{r}\,\vec{v}]\,dm$. Пусть моментной точкой служит произвольно выбранная точка тела $O$. По формуле (3.5) скорость движения любой точки твердого тела равна: $\vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}\,\vec{r}']$, где $\vec{v}_0$ — скорость полюса $O$, $\vec{\omega}$ — вектор угловой скорости тела и $\vec{r}'$ — радиус-вектор рассматриваемой точки в твердом теле. Подставим эту скорость в выражения для вектора момента импульса твердого тела относительно полюса $O$ и получим следующее выражение:

$$\vec{L} = [\int_V \vec{r}'dm\vec{v}_0] + \int_V [\vec{r}'[\vec{\omega}\,\vec{r}']]\,dm,$$

или (после раскрытия двойного векторного произведения и введения радиус-вектора центра масс тела)

$$\vec{L} = m[\vec{r}_c'\,\vec{v}_0] + \vec{\omega}\int_V r'^2 dm - \int_V \vec{r}'(\vec{\omega}\,\vec{r}')\,dm.$$

Очевидно, что первое слагаемое связано с поступательным движением тела, а остальные — с вращательным.

Последнее сложное выражение для вектора $\vec{L}$ упрощается при обращении в нуль первого слагаемого в двух случаях: когда полюсом $O$ служит неподвижная точка тела (тогда $\vec{v}_0 = 0$) и когда полюс $O$ совпадает с центром масс тела (тогда $\vec{r}_c = 0$).

Отсюда следует важное указание о выборе начала координат подвижной системы: если у твердого тела имеется неподвижная

точка, то начало координат нужно совместить с ней, в противном случае надо поместить начало координат в центр масс тела. Предположим, что выбор моментной точки сделан именно таким образом.

Спроецируем $\vec{L}$ на оси подвижной системы. Все преобразования достаточно проследить для одной из трех проекций, например для $L_{x'}$. Имеем:

$$L_{x'} = \omega_{x'}\int\limits_V (r')^2 dm - \int\limits_V x'(\vec{\omega}\,\vec{r}')\,dm =$$

$$= \omega_{x'}\int\limits_V ((x')^2 + (y')^2 + (z')^2) dm - \int\limits_V x'(\omega_{x'}x' + \omega_{y'}y' + \omega_{z'}z')\,dm.$$

После приведения подобных членов получаем результат:

$$L_{x'} = \omega_{x'}\int\limits_V ((y')^2 + (z')^2)\,dm - \omega_{y'}\int\limits_V x'y'dm - \omega_{z'}\int\limits_V x'z'dm.$$

Аналогичным способом вычисляются и проекции $L_{y'}$ и $L_{z'}$.

После сокращенного обозначения коэффициентов при проекциях угловой скорости, являющихся моментами и произведениями инерции тела относительно координатных осей, окончательный результат проецирования выразится следующим образом:

$$\begin{cases} L_{x'} = I_{1,1}\omega_{x'} + I_{1,2}\omega_{y'} + I_{1,3}\omega_{z'}; \\ L_{y'} = I_{1,2}\omega_{x'} + I_{2,2}\omega_{y'} + I_{2,3}\omega_{z'}; \\ L_{z'} = I_{1,3}\omega_{x'} + I_{2,3}\omega_{y'} + I_{3,3}\omega_{z'}. \end{cases} \tag{17.2}$$

Выражения для проекций момента количества движения на подвижные оси, связанные с твердым телом, остаются еще весьма сложными. Дальнейшее их упрощение достигается путем совмещения подвижных осей с главными осями инерции тела. В этом случае произведения инерции тела обратятся в нули и мы получим простейшие выражения для проекций момента количества движения:

$$L_{x'} = I_1\omega_{x'},\ L_{y'} = I_2\omega_{y'},\ L_{z'} = I_3\omega_{z'}. \tag{17.3}$$

Заметим, что в общем случае вектор момента количества движения $\vec{L}$ *не направлен* по мгновенной оси вращения, определяемой вектором $\vec{\omega}$. Это следует из формул (17.3). Совпадение имеет место только для случая, когда осью вращения служит главная ось инерции. Из формул (17.3) при $\omega_{x'} = \omega$, $\omega_{y'} = \omega_{z'} = 0$, например, следует: $L_{x'} = I_1\omega$, $L_{y'} = L_{z'} = 0$, поэтому справедливо векторное равенство $\vec{L} = I_1\vec{\omega}$, которое не выполняется в общем случае.

**17.3. Динамические уравнения вращения твердого тела.** Переходим к рассмотрению теоремы об изменении момента импульса твердого тела. Общий вид формулы этой теоремы совпадает с ранее полученной для произвольной системы материальных точек (14.4), а именно $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$.

Векторное уравнение, выражающее теорему для твердого тела, приходится проецировать на подвижные оси (см. § 2). При проецировании произвольного вектора на подвижную ось проекция про-

изводиой вообще не равна производной от проекции вектора иа ось, т. е. $\left(\frac{dL}{dt}\right)_{x'} \neq \frac{dL_{x'}}{dt}$.

В справедливости этого утверждения можио убедиться, рассматривая простой пример: если вектор $\vec{L}$ постоянный, то его проекция на подвижиую ось будет изменяться со временем. Производиая постояииого вектора по времеии равна иулю, и равиой нулю должиа быть и проекция производиой вектора на любую ось. Производиая же от переменной проекции вектора иа подвижную ось не равиа иулю.

Придадим уравнению, выражающему теорему об измеиеиии момеита импульса, другую форму, удобиую для проецироваиия иа подвижные оси. Если представить вектор $\vec{L}$ в виде иаправлениого отрезка, то производиая $\frac{d\vec{L}}{dt}$ определяет скорость коица этого отрезка. Обозначим эту скорость $\vec{V}$, и уравнение, выражающее теорему, приобретет вид: $\vec{V} = \vec{M}$.

*Скорость движения конца вектора момента импульса твердого тела по величине и по направлению совпадает с вектором главного момента сил, приложенных к телу* (теорема Резаля). Вектор скорости $\vec{V}$ по закоиу сложеиия скоростей можно представить в виде суммы отиосительиой скорости и переиосиой: $\vec{V} = \vec{V}_{от} + \vec{V}_{п}$. Обозначим относительиую скорость через $\vec{V}_{от} = \frac{d\vec{L}^*}{dt}$. Ее проекции иа подвижиые оси равиы производным от проекции вектора $\vec{L}$ на подвижные оси. Переносную скорость получим, считая вектор $\vec{L}$ иеподвижным отиосительио тела. Тогда скорость конца вектора совпадает со скоростью точки твердого тела, положеиие которой определяется радиус-вектором $\vec{r} = \vec{L}$, т. е. $\vec{V}_{п} = [\vec{\omega}\vec{L}]$.

Таким образом, имеем общую формулу, справедливую для производиой вектора (заданиого разложеиием по осям вращающейся системы):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}^*}{dt} + [\vec{\omega}\vec{L}].$$

Теорема об измеиеиии момеита импульса выразится теперь следующим равеиством:

$$\frac{d\vec{L}^*}{dt} + [\vec{\omega}\vec{L}] = \vec{M}. \qquad (17.4)$$

Проецироваиие этого векториого уравнения иа оси подвижной системы координат дает диффереициальные уравнения для вращательного движеиия твердого тела. Выбирая в качестве подвижиых осей главные оси иерции и полюс, которым служит иеподвижиая

точка или центр масс, получим систему уравнений:

$$\frac{dL_{x'}}{dt} + \omega_{y'}L_{z'} - \omega_{z'}L_{y'} = M_{x'},$$
$$\frac{dL_{y'}}{dt} + \omega_{z'}L_{x'} - \omega_{x'}L_{z'} = M_{y'},$$
$$\frac{dL_{z'}}{dt} + \omega_{x'}L_{y'} - \omega_{y'}L_{x'} = M_{z'}.$$

После подстановки значения проекций $L_{x'}$, $L_{y'}$, $L_{z'}$ из формул (17.3) последние уравнения принимают окончательный вид:

$$\begin{cases} I_1\dfrac{d\omega_{x'}}{dt} + (I_3 - I_2)\,\omega_{y'}\omega_{z'} = M_{x'}, \\ I_2\dfrac{d\omega_{y'}}{dt} + (I_1 - I_3)\omega_{x'}\omega_{z'} = M_{y'}, \\ I_3\dfrac{d\omega_{z'}}{dt} + (I_2 - I_1)\omega_{x'}\omega_{y'} = M_{z'}, \end{cases} \tag{17.5}$$

где $I_1$, $I_2$, $I_3$ — главные центральные моменты инерции тела.

Данные уравнения называются *динамическими уравнениями Эйлера*. К решению этих уравнений и сводится задача о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки. В общем случае она весьма сложна, и мы обратимся к ней в сравнительно простых частных случаях (см. примеры в конце параграфа).

**17.4. Условия равновесия твердого тела.** В соответствии с тем, что движение твердого тела можно представить как совокупность поступательного движения и вращения, условия его равновесия сведутся к условиям, обеспечивающим равенство нулю ускорения центра масс и углового ускорения. Поэтому, используя формулу (17.1), получаем первое уравнение равновесия:

$$\Sigma\vec{F}_i = 0, \tag{17.6}$$

а из формулы (17.4) — второе уравнение равновесия:

$$\Sigma M_i = 0. \tag{17.7}$$

Таким образом, *для равновесия свободного тела необходимо равенство нулю главного вектора и главного момента сил, приложенных к нему.*

Условия равновесия для несвободного тела соответственно упрощаются. Так, для тела с неподвижной осью вращения — это равенство нулю суммы моментов сил относительно оси, а с закрепленной точкой — относительно данной точки.

Пример 17.1. **Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.**

В этом простейшем случае вращательного движения твердого тела применение уравнения (17.4) упрощается. Во-первых, положение подвижной оси, совпадающей с направлением $\vec{L}$ (например, $O'z'$), с течением времени не изменяется, поэтому имеем только

$$\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \vec{M},$$

где при дифференцировании $\vec{L}$ берется производная от соответствующей проекции. Во-вторых, в данном случае $\vec{L}=I\vec{\omega}$, если $I$ — момент инерции тела относительно указанной оси вращения.

Таким образом, имеем уравнение движения для тела: $I\frac{d\vec{\omega}}{dt}=\vec{M}$, по форме аналогичное основному уравнению динамики материальной точки. В этом случае движение исчерпывается одним скалярным уравнением (в проекциях на ось вращения):

$$I\varepsilon=M,$$

из которого, в частности, вытекает, что постоянный момент вызывает равноускоренное вращение.

Пример 17.2. **Физический маятник.**

Физическим маятником называют твердое тело, имеющее возможность вращаться без трения вокруг горизонтальной оси и находящееся под действием только силы тяжести (рис. 17.1).

Положению устойчивого равновесия маятника соответствует нахождение центра масс (центра тяжести) $C$ на вертикали $AO$, проходящей через ось подвеса $O$. При отклонении маятника от положения равновесия на угол $\varphi$ сила тяжести развивает момент, стремящийся восстановить нарушенное равновесие. Восстанавливающий момент $\vec{M}$ и вектор бесконечно малого поворота $d\vec{\varphi}$ направлены в противоположные стороны. Уравнение движения в проекциях на ось вращения примет вид:

$$I\frac{d\omega}{dt}=-mga\sin\varphi.$$

Ограничимся рассмотрением малых колебаний, при которых отклонение маятника от положения равновесия настолько мало, что приближенно можно считать $\sin\varphi\approx\varphi$. Дифференциальное уравнение для малых колебаний маятника представляется тогда простейшим линейным однородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-mga\varphi.$$

Общий интеграл этого дифференциального уравнения известен:

$$\varphi=A\sin\left(\sqrt{\frac{mga}{I}}\,t+\alpha\right).$$

Здесь $A$ и $\alpha$ — постоянные интегрирования. Малые колебания маятника происходят по закону простого гармонического колебания с периодом $T_\Phi=2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}}$.

Величину $l=\frac{I}{ma}=OO_1$ называют приведенной длиной физического маятника. Она показывает, что если массу тела сосредоточить в точке $O_1$, то мы получим математический маятник длиной $l$, период колебаний которого будет равен периоду колебаний нашего физического маятника:

$$T_M=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}=T_\Phi.$$

Точку $O_1$ называют центром качания.

Существует зависимость между центром качания $O_1$ и точкой подвеса $O$: если центр качания принять за точку подвеса, то прежняя точка подвеса будет центром качания.

Для доказательства этого утверждения прежде всего покажем, что приведенная длина физического маятника $OO_1=l\geqslant a$ (равенство выполняется для математического маятника).

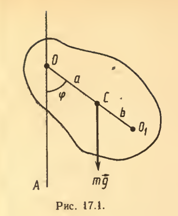


Рис. 17.1.

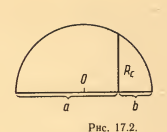


Рис. 17.2.

Момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку $O$, находим по теореме Штейнера (16.4):

$$I_0 = I_c + ma^2,$$

а приведенная длина

$$l = \frac{I_0}{ma} = \frac{I_c}{ma} + a > a,$$

так как

$$\frac{I_c}{ma} > 0.$$

Теперь докажем взаимность (сопряженность) точек $O$ и $O_1$. Из предыдущего равенства имеем:

$$l - a = \frac{I_c}{ma},$$

$$(l - a)a = \frac{I_c}{m} = R_c^2.$$

Здесь $R_c$ — радиус инерции тела (см. 16.2), который является характеристикой инертных свойств тела при вращении его вокруг определенной оси, не зависящей от переноса точки подвеса. Обозначим $CO_1 = b$. Тогда $ab = R_c^2$. Из этого равенства вытекает геометрический способ (рис. 17.2) нахождения приведенной длины физического маятника $l = a + b$ и ее инвариантность относительно точки подвеса и центра качания.

Пример 17.3. **Движение свободного симметричного волчка.**

Для определения кинематических уравнений вращения твердого тела вокруг неподвижной точки требуется решение системы нелинейных дифференциальных уравнений Эйлера (17.5). Эта сложная математическая задача может быть аналитически доведена до конца лишь в немногих частных случаях, которыми занимались знаменитые математики Эйлер, Лагранж, Ковалевская и др. Мы в качестве примера рассмотрим наиболее простой случай вращения тела по инерции, т. е. при отсутствии моментов сил, приложенных к телу. Эта задача впервые была решена Эйлером и носит его имя.

Предположим, что центральный эллипсоид инерции рассматриваемого тела есть эллипсоид вращения. Тогда два главных момента инерции между собой равны. Пусть $I_1 = I_2 \neq I_3$. Третья неравная ось эллипсоида инерции определяет ось кинетической симметрии тела. В простейшем, но практически важном случае геометрическая ось однородного тела является осью кинетической симметрии. Для того чтобы освободить тело от действия момента силы тяжести, достаточно подпереть его в центре тяжести. Если при этом никаких сил больше нет, то мы получим свободный волчок.

Дифференциальные уравнения Эйлера (17.5) для него имеют вид:

$$I_1\dot{\omega}_{x'} + (I_3 - I_1)\omega_{y'}\omega_{z'} = 0,$$
$$I_1\dot{\omega}_{y'} + (I_1 - I_3)\omega_{z'}\omega_{x'} = 0,$$
$$I_3\dot{\omega}_{z'} = 0.$$

При написании уравнений подвижная ось $Oz'$ предполагается направленной по оси кинетической симметрии. Из последнего уравнения следует первый интеграл движения: $\omega_{z'} = n = \text{const}$.

Для дальнейшего интегрирования уравнений используем закон сохранения момента импульса, имеющий место в нашем случае. При движении тела вектор $\vec{L}$ сохраняет неизменными свой модуль и направление. Совместим с неизменным направлением вектора $\vec{L}$, определяемым начальными условиями движения, неподвижную ось $Oz$. Спроецируем теперь постоянный вектор $\vec{L}$, направленный по оси $Oz$, на оси подвижной системы. Заметим, что подобное проецирование выполнялось в § 2 при выводе выражений проекций вектора угловой скорости через эйлеровы углы. Вектор $\vec{L}$ в нашем случае проецируется совершенно одинаково с составляющей $\vec{\omega}_\varphi$, направленной по неподвижной оси $Oz$. Поэтому напишем выражения искомых проекций вектора $\vec{L}$ без пояснений. Имеем:

$$L_{x'} = L\sin\vartheta\sin\psi,\ L_{y'} = L\sin\vartheta\cos\psi,\ L_{z'} = L\cos\vartheta.$$

С другой стороны, проекции вектора момента импульса на главные оси инерции даются общими формулами (17.3):

$$L_{x'} = I_1\omega_{x'},\ L_{y'} = I_2\omega_{y'},\ L_{z'} = I_3\omega_{z'}.$$

Из сравнения выражения для $L_{z'}$ следует равенство $L\cos\vartheta = I_3\omega_{z'}$, из которого при использовании первого интеграла для $\omega_{z'}$ получаем важный результат: $\cos\vartheta = \dfrac{I_3 n}{L} = \text{const}$, откуда $\vartheta = \vartheta_0 = \text{const}$, т. е. при движении тела ось кинетической симметрии сохраняет постоянным наклон к неподвижной оси $Oz$, равный $\vartheta_0$.

Из сравнения выражений для $L_{x'}$ следует равенство

$$L\sin\vartheta_0\sin\psi = I_1\omega_{x'}.$$

Внесем в него значение $\omega_{x'}$, выраженное через эйлеровы углы по формуле (2.13), причем принимаем во внимание, что $\vartheta = \vartheta_0$. Имеем: $\omega_{x'} = \dot{\varphi}\sin\vartheta_0\sin\psi$. Подстановка в выражение $L_{x'}$ значения проекции угловой скорости приводит к следующему результату:

$$L\sin\vartheta_0\sin\psi = I_1\dot{\varphi}\sin\vartheta_0\sin\psi,\quad \dot{\varphi} = \frac{L}{I_1} = \text{const} = \omega_2,$$

т. е. угловая скорость процессионного движения тела постоянна.

Наконец, подставляя в первый интеграл значение $\omega_{z'}$ из формул (2.13), имеем: $\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta_0 = n$, $\dot{\psi} = n - \omega_2\cos\vartheta_0$.

Отсюда следует, что угловая скорость собственного вращения (вращения вокруг оси кинетической симметрии) тоже постоянна: $\dot{\psi} = \omega_1 = \text{const}$.

Задача решена, кинематические уравнения движения свободного волчка найдены:

$$\psi = \omega_1 t + \psi_0,\ \varphi = \omega_2 t + \varphi_0,\ \vartheta = \vartheta_0. \tag{17.8}$$

Эти уравнения описывают простейшее движение твердого тела вокруг неподвижной точки, называемое *регулярной прецессией*. Наглядно движение можно представить, если круглый конус катить без скольжения по боковой поверхности неподвижного конуса так, чтобы вершины конусов совпадали. (См. пример 2.3 и рис. 2.9.)

Пример 17.4. **Движение симметричного волчка под действием сил.**

Поставим вопрос: возможна ли регулярная прецессия симметричного волчка при наличии моментов сил и каковы они должны быть?

Систему дифференциальных уравнений Эйлера

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_{x'} + (I_3 - I_1)\,\omega_{y'}\omega_{z'} = M_{x'}, \\ I_1\dot{\omega}_{y'} + (I_1 - I_3)\,\omega_{z'}\omega_{x'} = M_{y'}, \\ I_3\dot{\omega}_{z'} = M_{z'} \end{cases}$$

решим относительно $M_{x'}$, $M_{y'}$ и $M_{z'}$ при заданных кинематических уравнениях (17.8):

$$\dot{\psi} = \omega_1,\ \dot{\varphi} = \omega_2,\ \dot{\vartheta} = 0,\ \vartheta = \vartheta_0.$$

Подставляя в проекции угловых скоростей (формулы (2.13)) найденные значения $\dot{\psi}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\vartheta}$, получаем:

$$\omega_{x'} = \omega_2 \sin\vartheta_0 \sin\psi,$$
$$\omega_{y'} = \omega_2 \sin\vartheta_0 \cos\psi,$$
$$\omega_{z'} = \omega_2 \cos\vartheta_0 + \omega_1.$$

Затем вычисляем моменты:

$$M_{x'} = M\cos\psi,\ M_{y'} = -M\sin\psi,\ M_{z'} = 0,$$

где

$$M = I_3\omega_1\omega_2 \sin\vartheta_0 \left[1 + \frac{I_3 - I_1}{I_3}\ \frac{\omega_2}{\omega_1}\cos\vartheta_0\right]. \tag{17.9}$$

Это значит, что регулярная прецессия будет происходить, если на симметричный волчок действует момент сил с указанными проекциями.

Пример 17.5. **Гироскоп и гироскопический момент.**

Гироскопом называется симметричный волчок, обладающий очень большой скоростью вращения $\omega_1$ вокруг оси кинетической симметрии. В свою очередь ось кинетической симметрии также может вращаться (прецессировать) с относительно малой угловой скоростью $\omega_2$, так что осуществляется сильное неравенство $\omega_2 \ll \omega_1$. Тогда формула (17.9) дает приблизительное равенство $M = I_3\omega_2\omega_1 \sin\vartheta_0$ и можно ввести вектор

$$\vec{M} = I_3\,[\vec{\omega}_2\vec{\omega}_1]. \tag{17.10}$$

Это главный момент сил, приложенных к симметричному волчку, в результате чего осуществляется регулярная прецессия. Как видим, вектор момента должен лежать на линии узлов $ON$ (см. рис. 2.2).

Формула (17.10) и кладется в основу элементарной теории гироскопических явлений. Момент силы $\vec{M}$ передается оси гироскопа через опоры (подшипники), в которых она закреплена, и вызывает прецессию гироскопа с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$. В свою очередь, гироскоп при изменении направления своей оси вращения в прецессионном движении оказывает на опоры давление с моментом силы $\vec{M}_g = -\vec{M}$.

Момент $\vec{M}_g$ называется гироскопическим. Он будет определяться равенством

$$\vec{M}_g = I_3\,[\vec{\omega}_1\vec{\omega}_2]. \tag{17.11}$$

Рассмотрим пример применения уравнений (17.9), (17.10) и (17.11). На рисунке 17.3 изображен диск, вращающийся в опорах $AB$ с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$. Пусть к опорам приложена пара сил $\vec{F}$ и $-\vec{F}$, момент которой представлен вектором $\vec{M}$, направленным за плоскость чертежа. По формуле (17.10) вращение оси, вызываемое парой сил, определяется вектором $\vec{\omega}_1$, расположенным в плоскости чертежа. Таким образом, ось

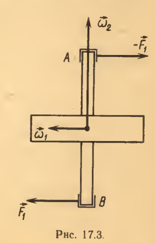


Рис. 17.3.

диска в точке приложення снл $\vec{F}$ движется в направлеини, перпенднкулярином силе. На первый взгляд такое поведение осн представляется страиным, так как в обычных условиях покоящееся тело под действнем прнложеной снлы всегда смещается в иаправлеинн последней. В даином случае снла приложеиа к вращающемуся телу н поведение оси под действием снлы обусловлеио инертнымн свойствамн быстрого вращення вокруг оси.

Условня, аналогнчиые рассмотренному прнмеру, часто встречаются в действительностн. Вал и воздушный внит нлн турбииа двигателя самолета представляют систему, аналогичную вращающемуся диску. Прн виражах самолета в горизоитальиой плоскости ось двигателя получает вынужденную прецессию с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$, иаправлеииой по вертнкалн. Тогда в соответствни с формулой (17.11) заключаем, что к самолету прнложеи гироскопический момент, стремящнйся повериуть его вокруг горизонтальной осн. В результате при вираже иос самолета будет поворачиваться вннз нли вверх и пилот для компенсацин гироскопического момента должен прн виражах устраиять этот поворот действнем вертнкального руля.

Возннкновеиие гнроскопического момента при вынуждеином повороте оси гироскопа нспользуется в гироскопнческом компасе и миогих другнх совремеиных гнроскопнческнх прнборах н устройствах.

## § 18. Кинетическая энергия твердого тела

**18.1. Формула кинетической эиергии твердого тела.** Найдем формулу кииетической энергии твердого тела. Будем исходить из теоремы Кенига для системы материальиых точек, выражающейся формулой (13.11):

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (v_i')^2. \qquad (18.1)$$

Первый члеи представляет здесь кииетическую энергию поступательного движеиия системы со скоростью центра масс. Если применить формулу к твердому телу, ои не изменяется. Второй член в (13.11) представляет сумму кинетических эиергий всех точек при их движеииях отиосительно центра масс (центра иерции) со скоростями $v_i'$. Для твердого тела это будут скорости его элеметов $dm$, движение которых ограничеио условием постоянства формы и размеров тела. Движеиие элементов твердого тела отиосительио системы, движущейся поступательио вместе с центром масс, имеет место только вследствие вращения тела вокруг мгновенной оси, проходящей через центр масс.

Скорость движеиия точки твердого тела отиосительно центра масс

$$\vec{v} = [\vec{\omega}\, \vec{r}],$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор, проведенный к элементу массы $dm$ из центра масс $C$. Кииетическая энергия вращательного движения твердого тела вокруг оси $s$ ($\vec{s}_0$ — единичиый вектор оси), проходящей через центр масс тела, выразится следующим иитегралом, распространенным по объему тела:

$$T_{\text{в}} = \frac{1}{2} \int_V [\vec{\omega}\, \vec{r}]^2 dm.$$

Заметнв, что $r\sin(\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \rho$ (рис. 18.1), получим:

$$T_{\text{в}} = \frac{1}{2}\omega^2 \int\limits_V \rho^2 dm.$$

Но велнчнна интеграла по формуле (16.1) является моментом ниерцни тела относительио оси.

Итак, кннетическая энергня вращення твердого тела определяется формулой

$$T_{\text{в}} = \frac{1}{2} I_s \omega^2,$$

а полная кннетическая энергия твердого тела выражается теперь следующим равенством:

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I_s \omega^2, \tag{18.2}$$

где первый член описывает кинетическую эиергню тела при *поступательном* движеннн, второй — прн *вращательном*. Оба члеиа являются независимымн в том отношеиии, что не связаиы друг с другом через скоростн, поэтому могут примеияться по отдельностн.

Но полученияя формула для кинетической эиергин вращательного движения твердого тела (18.2) может быть нспользована для вычнсления только в случае, когда вектор угловой скоростн ие нзменяет своего иаправления при двнжеини тела (иапример, при вращеиии тела вокруг неподвнжиой осн). Еслн это условие ие выполняется, момент инерцнн $I_s$ становится перемеиной велнчииой н формула практически оказывается непрнгодной для использовання. В этом случае выражаем момент ннерцин $I_s$ относнтельно мгновенной осн вращення через главные моменты ннерции по формуле (16.7) и замечаем, что $\omega\alpha = \omega_{x'}$, $\omega\beta = \omega_{y'}$, $\omega\gamma = \omega_{z'}$ есть проекцни угловой скоростн на подвижные оси. Тогда для кннетнческой энергни вращательного двнжения получается следующее выражеине:

$$T_{\text{в}} = \frac{1}{2}(I_1\omega^2{}_{x'} + I_2\omega^2{}_{y'} + I_3\omega^2{}_{z'}). \tag{18.3}$$

Подставив сюда зиачення нз формул (17.3), запишем выраженне кинетической энергнн вращения твердого тела через проекцнн момента нмпульса на главные осн инерции:

$$T_{\text{в}} = \frac{1}{2}\left(\frac{L^2{}_x}{I_1} + \frac{L^2{}_y}{I_2} + \frac{L^2{}_z}{I_3}\right). \tag{18.4}$$

Как для тела с неподвижиой осью вращеиия, так н для шарового волчка формула (18.4) упрощается:

$$T_{\text{в}} = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{L^2}{I}. \tag{18.5}$$

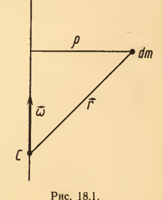


Рис. 18.1.

**18.2. Теорема об изменеиии киоетической эиергии твердого тела.** Для того чтобы иайти измеиеиие киоетической эиергии твердого тела, будем исходить из теоремы для системы материальиых точек (14.8), которая гласит, что дифференциал киоетической энергии системы равеи элемеитарной работе внешиих и внутреииих сил и записывается равеиством

$$dT = \delta A + \delta A',$$

но для твердого тела $\delta A' = 0$ вследствие связей твердости. Киоетическая энергия твердого тела иайдеиа раиее — формула (18.2). Ее приращеиие и равио работе виешиих сил.

Рассмотрим теперь элемеитариую работу сил, приложеииых к твердому телу, при его бескоиечио малом перемещеиии. Пусть к твердому телу приложеиа произвольная система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$, точки приложеиия которых в иеподвижиой системе коордииат $Oxyz$ определяются векторами $\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n$ (см. § 3). Начало координат подвижиой системы $O'$ совместим с цеитром масс $C$ твердого тела, а оси $x', y', z'$, связаииые с телом, направим произвольно. Бесконечио малое перемещение точки приложения $i$-й силы равно:

$$d\vec{r}_i = d\vec{r}_c + [d\vec{\varphi}\,\vec{r}_i'].$$

Элемеитарная работа $i$-й силы поэтому выражается равенством

$$\vec{F}_i d\vec{r}_i = \vec{F}_i d\vec{r}_c + \vec{F}_i[d\vec{\varphi}\,\vec{r}_i'],$$

а элементарная работа всех сил, приложеиных к телу, равна:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i d\vec{r}_i = d\vec{r}_c \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + d\vec{\varphi} \sum_{i=1}^{n} [\vec{r}_i'\vec{F}_i].$$

(В скалярно-векториом произведении миожители переместительны с соблюдеиием кругового порядка. Заметим также, что векторы $d\vec{r}_c$ и $d\vec{\varphi}$ не зависят от точки тела и могут быть выиесеиы за знак суммы.) Вводя сокращениое обозиачеиие для главиого вектора и главиого момеита сил, приходим к окоичательному выражению элемеитарной работы сил, приложенных к твердому телу:

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r}_c + \vec{M} d\vec{\varphi}.$$

Получеиный результат коротко выражается словами: *на поступательном перемещении твердого тела «работает» главный вектор системы сил, а на вращательном — главный момент.*

Теорема об измеиеиии кинетической эиергии твердого тела запишется теперь следующим равенством:

$$d\left(\frac{1}{2} m v_c^2\right) + d\left(\frac{1}{2} I_s \omega^2\right) = \vec{F} d\vec{r}_c + \vec{M} d\vec{\varphi}.$$

Это равенство распадается иа два самостоятельиых уравиеиия, описывающих измеиеиие киоетической энергии поступательиого движения тела со скоростью цеитра масс и измеиеиие киоетической

энергии вращательного движения тела вокруг центра масс, т. е.

$$d\left(\frac{1}{2} m v_c^2\right) = \vec{F} d\vec{r}_c, \tag{18.6}$$

$$d\left(\frac{1}{2} I_s \omega^2\right) = \vec{M} d\vec{\varphi}, \tag{18.7}$$

что еще раз свидетельствует о возможности раздельного изучения поступательного и вращательного движения тела.

## ГЛАВА VI. ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

В теме, к изучению которой вы приступаете, будут рассматриваться общие методы решения задач механики для *несвободной системы материальных точек.* Данный раздел известен как *аналитическая механика.* Суть применения методов и уравнений аналитической механики состоит в упрощении задач на систему материальных точек. В § 13 говорилось о том, что для описания движения системы из $n$ материальных точек требуется составить и решить $3n$ дифференциальных уравнений второго порядка. Если система несвободна, то, как это следует из § 7, необходимо учесть уравнения связи, найти силы реакции, что еще более осложняет задачу с математической стороны. В аналитической механике разработаны методы, посредством которых снижается число дифференциальных уравнений, описывающих поведение системы со связями.

### § 19. Принцип виртуальных перемещений

**19.1. Виртуальные перемещения, вариации координат и функций.** Ниже везде изучается система материальных точек, на которую наложено *m голономных, удерживающих,* в общем случае *нестационарных* связей, выражаемых уравнениями

$$\begin{cases} f_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, z_n, t) = 0, \\ f_2(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, z_n, t) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_m(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, z_n, t) = 0. \end{cases} \tag{19.1}$$

Так как число точек системы предполагается равным $n$, то число степеней свободы системы будет $3n - m = s$.

Назовем произвольные бесконечно малые перемещения точек системы, удовлетворяющие наложенным на нее связям при фиксированном моменте времени, *виртуальными перемещениями.* Вектор виртуального перемещения $i$-й точки обозначим символом $\delta\vec{r}_i$, а проекции на оси координат $\delta x_i$, $\delta y_i$, $\delta z_i$ и назовем последние *вариациями координат.* Важно подчеркнуть, что виртуальные перемещения вовсе не предполагают наличие движения системы под действием приложенных сил; это мысленные перемещения точек системы из данного положения в любое ближайшее положение, которое возможно для системы по условиям связей, взятых в рассматриваемый момент времени.

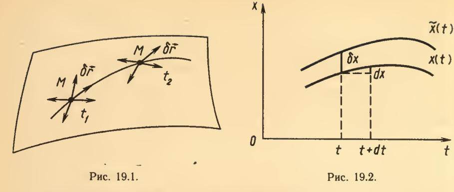



Рис. 19.1. Рис. 19.2.

Понятие виртуального перемещения поясним на примере движения одной материальной точки по поверхности, которая с течением времени может деформироваться. Фиксируя положение материальной точки на траектории действительного движения в любые моменты времени $t_1$, $t_2$, имеем соответственно виртуальные перемещения для каждого момента времени (рис. 19.1). Подчеркнем еще раз, что виртуальное перемещение не происходит во времени, не является функцией времени как действительное перемещение материальной точки при ее движении.

Пусть происходит действительное движение материальной точки в системе. Координата $x_i$ есть некоторая функция времени, т. е. $x_i = x_i(t)$. Эта функция может быть весьма различной при различных силах и начальных условиях; движение может быть каким угодно в широких пределах. Но при определенных силах и начальных условиях это совершенно определенная конкретная функция. Для каждого действительного положения точки связи допускают близкие соседние положения, отличающиеся от действительного вариациями координат. Поэтому мысленно может быть рассмотрено «соседнее» движение, происходящее по уравнению $\tilde{x}_i = \tilde{x}_i(t)$, т. е. такое, что для любого момента времени $t$ разность значения координаты $x_i$ соседних движений будет бесконечно малой величиной. Очевидно, что разность координат точки в действительном и мысленном движении в данный момент времени и будет вариацией координаты: $\widetilde{x_i}(t) - x_i(t) = \delta x_i$.

*Вариация координаты $\delta x_i$ есть ее бесконечно малое приращение, обусловленное переходом в данный момент времени от заданного движения к мысленному, допускаемому связями.*

Укажем на различие вариации и бесконечно малого приращения координаты $dx_i$, обусловленного приращением аргумента $t$. Последнее рассматривается как *дифференциал координаты* $x_i(t + dt) - x_i(t) = dx_i$.

На рисунке 19.2 изложенные выше определения вариации и дифференциала координаты $x_i$ пояснены графически. Это различные, но оба бесконечно малые изменения координат.

В аналитической механике широко применяется метод варьирования не только координат, но и функций координат точек системы. Варьирование является математическим методом исследования систем материальных точек со связями с целью получения уравнений, описывающих их равновесие и движение.

Варьирование — это нечто подобное тому, что делает портной перед раскроем материала. Прежде чем разрезать данный кусок материала, он должен мысленно представить по крайней мере несколько возможных вариантов и только потом осуществить один из них. Аналогичное положение имеет место и при проектировании любого сооружения. Процесс проектирования — это выбор одного из многих возможных при данных условиях решений поставленной задачи, как правило, определяемого некоторыми дополнительными жесткими требованиями: размерами, назначением, экономичностью и т. д. Во всех подобных случаях приходится производить процесс сравнения между многими объектами, объединенными в семейство по какому-либо признаку.

Можно поставить задачу о движении системы со связями следующим образом: найти единственное движение, которое осуществляется при заданных силах и начальных условиях из всех, допускаемых связями, т. е. возможных по условиям связей. Математически задача сводится к выбору из различных функций, образующих непрерывное множество, какой-то единственной. Такая физическая задача ставится и решается в аналитической механике. Она связана с понятием виртуального перемещения, вариациями функций, ибо выбор нужной функции определяют ее вариации.

Пусть задана некоторая функция координат и времени

$$f = f(x_1 y_1 z_1,\ x_2 y_2 z_2,\ \dots,\ x_n\ y_n\ z_n,\ t).$$

Координаты — аргументы функции — подверглись варьированию, при этом изменилось и значение функции. *Приращение функции, обусловленное вариацией ее независимых переменных (кроме времени), называется вариацией функции.* Найдем вариацию функции. Запишем новое значение функции:

$$f = f(x_1 + \delta x_1,\ y_1 + \delta y_1,\ z_1 + \delta z_1,\ \dots,\ x_n + \delta x_n,\ y_n + \delta y_n,\ z_n + \delta z_n,\ t).$$

Разложим функцию по степеням малых величин $\delta x_i$, $\delta y_i$, $\delta z_i$, используя ряд Тейлора:

$$f(x_1 + \delta x_1, \dots, z_n + \delta z_n, t) = f(x_1, \dots, z_n, t) +$$
$$+ \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial f}{\partial z_1} \delta z_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial z_n} \delta z_n \right) + \dots$$

Пренебрегая членами второго и высшего порядков малости и используя определение вариации функции

$$\delta f = f(x_1 + \delta x_1, \dots, z_n + \delta z_n, t) - f(x_1, \dots, z_n, t),$$

получаем вариацию функции:

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial f}{\partial z_1} \delta z_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial z_n} \delta z_n. \quad (19.2)$$

Обращает на себя внимание, что вариация функции (19.2) отличается от полного дифференциала функции только отсутствием члена $\frac{\partial f}{\partial t} \delta t$. При варьировании функций, зависящих от времени явно, *первая вариация функции вычисляется как полный дифферен-*

*циал, но при условии, что вариация независимого переменного $t$ равна нулю:* $\delta t = 0$. При варьировании сравнение функций производится для одного и того же значения аргумента $t$. Это так называемая *изохронная* вариация функции.

**19.2. Ограничения, налагаемые связями на виртуальные перемещения.** Вариации декартовых координат точек системы не могут быть совершенно произвольными и независимыми величинами потому, что декартовы координаты точек системы до и после перемещения должны удовлетворять уравнениям связи (19.1). Найдем, какие ограничения налагаются связями на вариации декартовых координат точек. Приращенные значения координат $x_i + \delta x_i$, $y_i + \delta y_i$, $z_i + \delta z_i$ по определению виртуального перемещения должны удовлетворять связям (19.1), т. е. справедливы равенства

$$f_1 = (x_1 + \delta x_1, \ldots, z_n + \delta z_n, t) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_m = (x_1 + \delta x_1, \ldots, z_n + \delta z_n, t) = 0.$$

Найдем вариации функций $f_1, f_2, \ldots, f_m$; варьируя уравнения связей, (19.1) и используя последние равенства, получим систему линейных уравнений, в которой неизвестными являются вариации декартовых координат:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\delta y_1 + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial z_n}\delta z_n = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial f_m}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f_m}{\partial y_1}\delta y_1 + \ldots + \frac{\partial f_m}{\partial z_n}\delta z_n = 0.$$

Таким образом, среди $3n$ вариаций координат независимых оказывается $s$-вариаций, т. е. столько, *сколько у системы степеней свободы.*

**19.3. Обобщенные координаты.** Как уже упоминалось в § 1, аналитическое определение положения материальной точки, а следовательно, и системы может быть осуществлено не только заданием декартовых прямоугольных координат, но и при помощи надлежащего количества параметров, через которые декартовы координаты выражаются однозначно. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

У несвободной системы точек декартовы координаты удовлетворяют системе $m$ независимых уравнений (19.1). При помощи этих уравнений из $3n$ декартовых координат $m$ могут быть выражены как однозначные функции остальных $s = 3n - m$ декартовых координат. Будем условно именовать последние *свободными* координатами. Число свободных координат, таким образом, определяется числом степеней свободы материальной системы. Теперь выберем $s$ независимых параметров $q_1, q_2, \ldots, q_s$ так, чтобы свободные декартовы координаты были однозначными функциями этих параметров:

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \ldots, q_s, t) = 0, \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \ldots, q_s, t) = 0, \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \ldots, q_s, t) = 0. \end{aligned} \tag{19.3}$$

Так как несвободные координаты являются однозначными функциями свободных координат, то несвободные координаты являются однозначными функциями тех же параметров $q_k$. Таким образом, все декартовы координаты могут быть выражены по формулам преобразования через $s$ параметров $q_k$ и времени $t$. При этом уравнения связи (19.1) удовлетворяются тождественно. Определенные таким образом параметры $q_k$ называют *обобщенными координатами* несвободной механической системы. В качестве обобщенных координат могут выступать различные величины. Заметим, что время будет входить в формулы преобразования (19.3) только тогда, когда связи, выражаемые уравнениями (19.1), нестационарны. Если связи стационарны, то декартовы координаты будут функциями только обобщенных координат. Выбор обобщенных координат для данной конкретной задачи не является определенным, он может быть осуществлен различными способами.

В конкретных случаях выбор обобщенных координат подсказывается видом связей, ограничивающих свободу движения механической системы. В дальнейшем предполагается, что обобщенные координаты выбраны и уравнения преобразования (19.3) являются известными.

Метод обобщенных координат, применяемых для описания движения (состояния) системы со связями, допускает важную математическую интерпретацию. Пространство, образованное совокупностью обобщенных координат $q_k$, носит название *пространства конфигураций*. Оно имеет $s$ измерений. Поскольку состояние системы $n$ материальных точек в любой момент времени задается набором координат $(q_1, q_2, ..., q_s)$, то оно тем самым задается положением *точки, изображающей систему* в пространстве конфигураций. Несмотря на формальный характер этого математического приема, он оказывается весьма полезным в ряде вопросов физической теории. Например, описание движения системы с помощью изображающей точки оказывается эффективным и наглядным, если число измерений конфигурационного пространства мало.

Пример 19.1. **Расчет ускорения системы связанных тел.**

Вернемся к системе связанных тел, рассмотренной ранее в примере 13.1. Вместо девяти декартовых координат, определяющих положение всех трех тел системы, она полностью описывается одной координатой $q$, являющейся смещением третьего тела от первоначального его положения; два других тела испытывают такие же смещения благодаря связям. Как было показано в решении, оно сводится к одному уравнению:

$$\ddot{q} = \frac{g[m_3 - k(m_1 + m_2)]}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Задача аналитической механики и состоит в указании общих простых и кратких путей составления дифференциальных уравнений движения систем в обобщенных координатах, минуя составление и решение громоздких систем из $3n$ дифференциальных уравнений.

Пример 19.2. **Выбор обобщенной координаты.**

На рисунке 19.3 показана система трех зубчатых колес, находящихся в зацеплении друг с другом. Если бы каждое колесо могло вращаться самостоятельно, то в качестве координат следовало бы рассматривать три независимых угла поворота каждого колеса $\varphi_1$, $\varphi_2$ и $\varphi_3$. При наличии связей — зацепления — можно написать

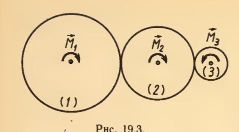



Рис. 19.3.

два уравнения связей:

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{r_1}{r_2}, \quad \frac{\varphi_3}{\varphi_2} = \frac{r_2}{r_3}.$$

Система имеет одну степень свободы: в качестве обобщенной координаты можно выбрать угол поворота первого колеса: $q = \varphi_1$. Методы аналитической механики позволяют составить одно динамическое уравнение движения системы, в которое, кроме $\ddot{\varphi}$, войдут моменты инерции колес и моменты приложенных к ним сил (см. пример 20.5).

Пример 19.3. **Выбор двух обобщенных координат.**

В качестве третьего примера рассмотрим материальную точку, движущуюся только по поверхности сферы радиуса $l$. Запишем уравнение связи (в декартовых координатах):

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0.$$

Так как система обладает двумя степенями свободы, то в качестве обобщенных координат можно выбрать угловые координаты сферической системы с центром в центре сферы, т. е. $q_1 = \vartheta$, $q_2 = \varphi$, при этом

$$x = l \sin \vartheta \cos \varphi, \; y = l \sin \vartheta \sin \varphi, \; z = l \cos \vartheta.$$

Если на точку действует сила, например сила тяжести (тогда система называется сферическим маятником), то средствами аналитической механики можно составить динамические уравнения движения для двух координат $\vartheta$ и $\varphi$, минуя рассмотрение реакций связи в обычных уравнениях:

$$m\ddot{x} = F_x + R_x, \; m\ddot{y} = F_y + R_y, \; m\ddot{z} = F_z + R_z$$

(см. примеры (19.8) и (20.3)).

**19.4. Принцип виртуальных перемещений. Обобщенные силы.** Необходимое и достаточное условие равновесия системы материальных точек сводится к равенству нулю алгебраической суммы проекций сил, приложенных к каждой точке системы, на каждую из координатных осей. Уравнения, выражающие условия равновесия, имеют вид:

$$F_{ix} + R_{ix} = 0, \; F_{iy} + R_{iy} = 0, \; F_{iz} + R_{iz} = 0, \qquad (19.4)$$

где через $R_{ix}$, $R_{iy}$ и $R_{iz}$ обозначены алгебраические суммы проекций реакций связей, приложенных к $i$-й точке. Умножим каждое из этих уравнений на вариацию соответствующей координаты и просуммируем полученные равенства. Получим следующий результат:

$$\sum_{i=1}^{n} (F_{ix}\delta_{xi} + F_{iy}\delta_{yi} + F_{iz}\delta_{zi} + R_{ix}\delta_{xi} + R_{iy}\delta_{yi} + R_{iz}\delta_{zi}) = 0. \qquad (19.5)$$

Стоящие в скобках выражения $\vec{F}_i\delta\vec{r}_i$ и $\vec{R}_i\delta\vec{r}_i$ имеют смысл работы силы на виртуальных перемещениях и называются *виртуальной работой*. Поэтому уравнение (19.5) означает, что *сумма виртуальных работ заданных (активных) сил и сил реакции для всех точек системы, находящейся в равновесии, равна нулю.*

Так как равенство (19.5) выведено из условия равновесия, то оно

необходимо для равновесия. Связи в данном случае учтены силами реакции, поэтому систему можно считать свободной, но подверженной действию сил $\vec{F}_i$ и $\vec{R}_i$. В таком случае все вариации $\delta\vec{r}_i$ независимы и из уравнения (19.5) вытекает:

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i = 0,$$

т. е. условие (19.5) оказалось достаточным. Доказано, что условия (19.4) и (19.5) равносильные. Однако при теоретическом анализе равновесия систем формулировка условий равновесия через виртуальные работы оказывается предпочтительнее.

Применим условие (19.5) к системе с идеальными связями. Геометрическая сумма сил реакций, приложенных к $i$-й точке, обусловлена действием всех связей и равна сумме нормальных реакций и сил трения, т. е.

$$\vec{R}_i = \vec{N}_i + \vec{T}_i.$$

Если силы трения отсутствуют, то связь является идеальной. Тогда виртуальная работа силы реакции

$$\vec{R}_i\delta\vec{r}_i = \vec{N}_i\delta\vec{r}_i = 0,$$

так как нормальные реакции работы не совершают.

Итак, *для идеальных связей виртуальная работа сил реакции должна обращаться в нуль*. Это требование по существу есть наиболее общее определение идеальных связей. Если наложенные на систему связи идеальны, силы, приложенные к системе, находящейся в равновесии, должны удовлетворять условию

$$\sum_{i=1}^{n} (F_{ix}\delta x_i + F_{iy}\delta y_i + F_{iz}\delta z_i) = 0. \qquad (19.6)$$

Это уравнение выражает принцип *виртуальных перемещений* аналитической статики, гласящий: *виртульная работа заданных сил, приложенных к системе с идеальными связями и находящейся в равновесии, равна нулю.*

Аналитическую формулировку (19.6) принципа виртуальных перемещений обычно связывают с именем Лагранжа. Общность принципа дает возможность получить при его помощи уравнения равновесия как свободной механической системы, так и несвободной. Для *свободной* системы все вариации декартовых координат $\delta x_i$, $\delta y_i$, $\delta z_i$ есть произвольные и независимые друг от друга бесконечно малые величины. При этих условиях равенство нулю суммы (19.6) или (19.5) возможно только, если обращаются в нуль коэффициенты при всех вариациях, что и приводит к уравнениям равновесия свободной системы. (Полезно заметить, что введение сил реакции в уравнение (19.5) превращает систему в свободную.)

Получение уравнений равновесия *несвободной* системы из принципа виртуальных перемещений — формулы (19.6) — без учета сил реакции значительно сложнее. Здесь сумма может обращаться в нуль и при неравенстве нулю коэффициентов при вариациях коорди-

нат, которые теперь не являются произвольными и независимыми величинами. Для получения уравнений равновесия в этом случае мы воспользуемся классическим способом, предложенным Лагранжем,— *методом обобщенных координат*.

Метод обобщенных координат состоит в следующем. Выбирают, исходя из условий конкретной задачи, систему независимых параметров $q_1, q_2, ..., q_3$ — обобщенных координат для данной задачи и, приведя формулы преобразования от декартовых координат к обобщенным (19.3) (время в них входить не будет), производят преобразование уравнения к обобщенным координатам.

Для этой цели варьируют формулы преобразования (19.3) и получают выражения для вариаций декартовых координат:

$$\delta x_i = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k, \ \delta y_i = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \delta q_k, \ \delta z_i = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \delta q_k. \quad (19.7)$$

Найденные выражения для вариаций декартовых координат вносят в уравнение виртуальной работы (19.6) и меняют порядок суммирования по индексам $i$, $k$. Получают следующее уравнение:

$$\sum_{k=1}^{s} \delta q_k \sum_{i=1}^{n} \left( F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) = 0.$$

Коэффициенты при вариациях обобщенных координат обозначают $Q_k$:

$$Q_k = \sum_{i=1}^{n} \left( F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \quad (19.8)$$

и называют *обобщенными силами*. После внесения сокращенных обозначений для обобщенных сил принцип виртуальных перемещений в обобщенных координатах получает окончательную форму:

$$\sum_{k=1}^{s} Q_k \delta q_k = 0. \quad (19.9)$$

Вследствие произвольности и независимости вариаций обобщенных координат написанная сумма может обратиться в нуль только при обращении в нуль всех коэффициентов при вариациях. Это и дает уравнение равновесия механической системы:

$$Q_k = 0 \ (k = 1, 2, ..., s). \quad (19.10)$$

Решение системы уравнений (19.10) определит значения обобщенных координат, соответствующих положениям равновесия. Математические трудности задачи при уменьшении числа степеней свободы не возрастают, а наоборот, задача становится более простой.

Обобщенная сила $Q_k$, определяемая равенством (19.8), представляет собой обобщение понятия механической силы. В зависимости от смысла обобщенной координаты $q_k$ соответствующая ей обобщенная сила $Q_k$ может быть различной величиной. Действительно, произведение $Q_k \delta q_k$, как это следует из уравнения (19.8), всегда должно иметь размерность работы. Отсюда размерность обобщенной силы опреде-

ляется отношением размерности работы к размерности соответствующей обобщенной координаты.

Например, для *угловой координаты* соответствующая ей обобщенная сила есть *момент силы относительно оси*, поворотом вокруг которой осуществляется изменение угла. Если обобщенная координата представляет собой *объем*, то обобщенная сила является *давлением* и т. д. Указанное обстоятельство делает возможным использование метода обобщенных координат и за пределами механики. В частности, он находит себе место в термодинамике.

Во многих случаях при решении простых задач на равновесие по методу обобщенных координат вовсе не требуется устанавливать и использовать формулу преобразования (19.3) от декартовых координат к обобщенным и затем преобразовывать к обобщенным координатам уравнение (19.6), как это было описано выше. Оказывается возможным сразу писать принцип виртуальных перемещений в обобщенных координатах в виде уравнения (19.9), определяя обобщенные координаты непосредственно из задачи.

Итак, мы рассмотрели уравнения равновесия несвободной механической системы. При этом связи предполагались голономными, удерживающими, стационарными, идеальными. Последнее условие не является обязательным. Принцип виртуальных перемещений справедлив и при неидеальных связях, например при наличии сил сухого трения. Если коэффициенты трения известны, то силы трения определяются и их нужно присоединить к заданным.

П р н м е р 19.4. **Вывод условий равиовесия тела с осью вращення.**

В качестве первого примера несвободиой системы рассмотрнм твердое тело, имеющее ось вращеиия. Выбнрая начало коордниат иа осн вращеиия, определяем положеиие любой точкн тела радиус-вектором $\vec{r}$, а виртуальиое перемещеиие соотношеиием

$$\delta\vec{r} = [\delta\vec{\varphi}\,\vec{r}\,],$$

где $\delta\vec{\varphi}$ — виртуальный угол поворота тела вокруг оси. Фнксируя точки приложення заданиых сил, по формуле (19.7) имеем:

$$\sum_i F_i[\delta\vec{\varphi}\,\vec{r}_i] = \delta\varphi\sum_i [\,\vec{r}_i\vec{F}_i\,] = 0.$$

Отсюда следует, что для равиовесня необходнмо равеиство иулю суммы моментов сил (относительно оси вращення), приложеииых к телу.

Нетрудно распростраиить вывод на тело с иеподвнжной точкой. В этом случае должиа быть равна иулю сумма момеитов сил относительно этой точки.

П р и м е р 19.5. **Вывод условий равиовесия для свободиого тела.**

Для свободиого твердого тела положеиие каждой точкн в простраистве определяется по формуле (3.1):

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}\,',$$

где $\vec{r}_0$ определяет положеине некоторой точки тела — полюса в неподвижиой системе, а $\vec{r}\,'$ — положеиие любой точкн в подвнжиой системе с началом в полюсе. Отсюда иаходим связь виртуальных перемещеиий между собой: $\delta\vec{r} = \delta\vec{r}_0 + [\delta\vec{\varphi}\,\vec{r}\,']$,

и прииципвиртуальных перемещений дает формулу

$$\sum_i\vec{F}_i\delta\vec{r}_0 + \sum_i\vec{F}_i[\delta\vec{\varphi}\,\vec{r}\,'] = \delta\vec{r}_0\sum_i\vec{F}_i + \delta\varphi\sum_i[\,\vec{r}\,'\vec{F}_i\,].$$

Условия равновесия в силу независимости вариаций $\delta\vec{r}_0$ и $\delta\varphi$ выражаются двумя равенствами:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0, \; \sum_i [\vec{r}'\vec{F}_i] = 0,$$

означающими, что главный вектор и главный момент сил, приложенные к твердому телу, должны быть равны нулю. (Этот вопрос уже рассмотрен в § 17 другим методом.)

Пример 19.6. **Нахождение сил реакции при условии равновесия несвободного тела.**

Включая силы реакции в число приложенных к телу сил, предыдущие условия равновесия свободного тела можно считать условиями равновесия несвободного. Полученные в предыдущем примере уравнения равновесия показывают, что для равновесия тела должны быть равны нулю главный вектор и главный момент:

$$\vec{F} + \vec{R} = 0, \quad \vec{M} + \vec{M}_R = 0.$$

Проецируя эти уравнения на оси координат, получаем шесть скалярных уравнений равновесия, позволяющие найти шесть проекций неизвестных сил и моментов реакций, если активные силы заданы.

Пример 19.7. **Нахождение условий равновесия системы при заданных силах.** К системе зубчатых колес (пример 19.2 и рис. 19.3) приложены моменты сил $M_1$, $M_2$, $M_3$. Найдем условие равновесия системы. Принцип виртуальных работ для данного случая выражается уравнением

$$M_1\delta\varphi_1 - M_2\delta\varphi_2 - M_3\delta\varphi_3 = 0.$$

Учитывая уравнения связи

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{r_1}{r_2}, \; \frac{\varphi_3}{\varphi_2} = \frac{r_2}{r_3},$$

имеем:

$$\varphi_2 = \frac{r_1}{r_2}\varphi_1, \; \varphi_3 = \frac{r_1}{r_3}\varphi_1,$$

откуда

$$\delta\varphi_2 = \frac{r_1}{r_2}\delta\varphi_1, \; \delta\varphi_3 = \frac{r_1}{r_3}\delta\varphi_1.$$

Подставляя вариации координат в первое уравнение и сокращая на $\delta\varphi_1$, получим условие равновесия:

$$M_1 = M_2\frac{r_1}{r_2} + M_3\frac{r_1}{r_3}.$$

**19.5. Потенциальные силы. Виды равновесия.** Найдем уравнения равновесия системы, в которой заданные силы являются потенциальными.

В предыдущем параграфе мы рассмотрели две системы уравнений равновесия: в декартовых координатах и обобщенных. Они будут справедливы и для потенциальных сил. Если не стоит специальная задача по определению сил реакции, то система уравнений равновесия в обобщенных координатах предпочтительней, так как сил реакции не содержат. Итак, используем условие (19.10):

$$Q_k = 0 \; (k = 1, 2, 3, ..., s).$$

Если известна потенциальная энергия в декартовых координатах:

$$U = U(x_i, y_i, z_i) \; (i = 1, 2, ..., n),$$

то декартовы проекции потенциальных сил легко вычисляются:

$$F_{ix} = -\frac{\partial U}{\partial x_i},\ F_{iy} = -\frac{\partial U}{\partial y_i},\ F_{zi} = -\frac{\partial U}{\partial z_i}.$$

В обобщенных координатах потенциальная энергия является сложной функцией последних:

$$U = U[x_i(q_k),\ y_i(q_k),\ z_i(q_k)].$$

Обобщенная сила

$$Q_k = \sum_{i=1}^{n}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right)$$

после подстановки проекций $\vec{F}_i$ примет вид:

$$Q_k = -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right) = -\frac{\partial U}{\partial q_k}. \quad (19.11)$$

Отсюда и следуют уравнения равновесия в случае потенциальных сил:

$$\frac{\partial U}{\partial q_k} = 0\ (k = 1, 2, ..., s). \quad (19.12)$$

Но условия равновесия (19.12) совпадают с *условиями экстремума функции* $U(q_1, q_2, ..., q_n)$. Значит, *при равновесии системы материальных точек, подверженных действию потенциальных сил, потенциальная энергия системы принимает экстремальное значение*. По виду экстремума равновесие подразделяется *на устойчивое, неустойчивое* и *седлообразное*.

Рассмотрим виды равновесия для одномерного случая (система описывается одной обобщенной координатой). На рисунке 19.4 изображен график потенциальной энергии при наличии точек минимума, максимума и перегиба. *Минимуму* соответствует устойчивое равновесие системы, так как отклонение изображающей точки (в пространстве $q$) от положения равновесия ведет к росту энергии $U$, т. е. к возникновению сил, возвращающих систему к равновесию. Наоборот, *максимуму* соответствует неустойчивое равновесие, так как система, выйдя из него, удаляется от равновесия дальше и дальше. Точке перегиба соответствует седлообразное равновесие, система стремится к возвращению в положение равновесия при ее отклонении в сторону увеличения энергии и удаляется от положения равновесия в противоположном случае. Наконец, если график $U$ представлен прямой, параллельной оси $q$, то равновесие системы безразличное.

Пример 19.8. **Положения равновесия сферического маятника.**

Рассмотрим сферический маятник (см. пример 19.3). Потенциальная энергия его в обобщенных координатах выражается формулой

$$U = mga\cos\vartheta.$$

Отсчет ведется от точки $O$. Условие равновесия одно:

$$\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = -mga\sin\vartheta = 0.$$

Оно приводит к двум точкам экстремума: $\vartheta = 0$ — максимум $U$, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ — минимум

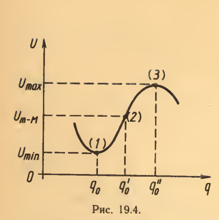


Рис. 19.4.

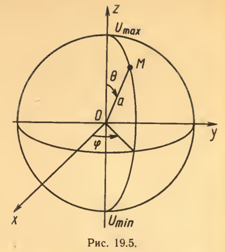


Рис. 19.5.

$U$. Соответственно это неустойчивое и устойчивое равновесия. В данном случае нагляден пространственный рисунок системы, ибо пространство конфигураций $(q_1 q_2)$ совпадает с поверхностью сферы (рис. 19.5), а кривая потенциальной энергии — с ее вертикальным сечением.

## § 20. Принцип Даламбера — Лагранжа. Уравнения Лагранжа

**20.1. Принцип Даламбера. Общее уравнение механики.** Дифференциальные уравнения движения несвободной материальной точки и системы могут быть представлены в форме *уравнений равновесия* системы сил. Впервые на это обстоятельство было указано Даламбером.

Воспользуемся дифференциальным уравнением движения (7.4) несвободной материальной точки в векторной форме и запишем его для системы $n$ точек:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n).$$

Соберем все члены в одну часть равенства и назовем векторы

$$\vec{F}_i^{\text{и}} = -\, m_i \vec{a}_i = -\, m_i \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

*даламберовыми силами инерции.* Дифференциальные уравнения движения системы материальных точек с введением даламберовых сил инерции приняли вид условий равновесия сил, приложенных к точкам системы:

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i + \vec{F}_i^{\text{и}} = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \dots,\ n). \qquad (20.1)$$

Указанное изменение формы записи основных уравнений динамики системы составляет содержание так называемого принципа Даламбера: *если к заданным силам и силам реакции связей добавить силы, равные силам инерции* ($-\, m_i \vec{a}_i$), *то полученная система будет находиться в равновесии.* В действительности механическая система

не находится в равновесии, но, если бы к точкам системы были приложены силы, равные даламберовым силам инерции, равновесие существовало бы на самом деле.

Математическое выражение принципа Даламбера в декартовых координатах получим при проецировании векторных уравнений (20.1) на оси координат:

$$\begin{cases} F_{ix} + R_{ix} - m\ddot{x}_i = 0, \\ F_{iy} + R_{iy} - m\ddot{y}_i = 0, \\ F_{iz} + R_{iz} - m\ddot{z}_i = 0. \end{cases} \tag{20.2}$$

Значение принципа Даламбера состоит в том, что он открывает возможность применения к решению динамических задач специфических методов аналитической статики и во многих случаях существенно упрощает решение этих задач. Принцип Даламбера оказывается полезным в задачах, где требуется определить силы реакции связей при движении системы (динамические реакции). Но кроме этих непосредственных практических приложений, принцип Даламбера оказывается связующим звеном между принципом виртуальных перемещений и важнейшими уравнениями движения в теории механических (и других) систем, о чем речь будет идти ниже.

Принцип Даламбера может быть объединен с принципом виртуальных перемещений, для чего достаточно умножить векторные уравнения (20.1) на векторы виртуальных перемещений точек системы $\delta\vec{r}_i$ и результаты просуммировать. Если рассматривать случаи идеальных связей, то можно не выписывать виртуальную работу сил реакций, равную нулю. Тогда получим:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \delta\vec{r}_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\vec{r}}_i \delta\vec{r}_i = 0. \tag{20.3}$$

Это уравнение называют *общим уравнением механики*. В декартовых координатах общее уравнение механики имеет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{n} (F_{ix}\delta x_i + F_{iy}\delta y_i + F_{iz}\delta z_i) - \sum_{i=1}^{n} m_i(\ddot{x}_i\delta x_i - \ddot{y}_i\delta y_i + \ddot{z}_i\delta z_i) = 0. \tag{20.4}$$

В словесной формулировке, которой удобно пользоваться при решении конкретных задач, общее уравнение механики сводится к утверждению: *в любой момент времени движения механической системы алгебраическая сумма виртуальных работ заданных сил и даламберовых сил инерции равна нулю.*

Общее уравнение механики и его словесная формулировка выражают объединенный принцип *Даламбера — Лагранжа* — самый общий вариационный принцип. Этот принцип можно использовать в качестве *основной аксиомы механики,* так как из него можно вывести как уравнения равновесия, так и дифференциальные уравнения движения механической системы. Целесообразно заметить, что общее уравнение механики может быть применено и для неидеальных связей. В этом случае с учетом разложения сил реакции на

нормальные и тангенциальные составляющие (силы трения) имеем:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{T}_i \delta \vec{r}_i - \sum_{i}^{n} m_i \ddot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i = 0. \qquad (20.3а)$$

Уравнение (20.3а) применяется для системы со связями так же, как и (20.3).

Пример 20.1. **Применение общего уравнения механики к системе с идеальными связями.**

Система тел, связанных нитью, переброшенной через блок, изображена на рисунке 20.1. Инертными свойствами блока пренебрегаем. Требуется найти ускорения движения тел. Для этого составляем динамические уравнения, используя формулы (20.3), и, выбирая направления $\delta \vec{r}$, как показано на рисунке, получаем:

$$-m_1 g \delta r_1 - m_2 g \delta r_2 + m_3 g \delta r_3 - m_1 \ddot{r}_1 \delta r_1 - m_2 \ddot{r}_2 \delta r_2 - m_3 \ddot{r}_3 \delta r_3 = 0.$$

Учитывая связь, имеем:

$$\delta r_1 = \delta r_2 = \delta r_3, \; \ddot{r}_1 = \ddot{r}_2 = \ddot{r}_3 = a,$$

откуда, сокращая на $\delta r$, окончательно получим:

$$a = \frac{g(m_3 - m_1 - m_2)}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

При решении задачи совершенно не затрагивались силы реакции, что значительно упростило решение. Если дополнительно стоит задача на нахождение сил реакции, то общее уравнение позволяет легко их отыскать. Например, для первого тела имеем равенство

$$-m_1 g + R_1 - m_1 a = 0,$$

откуда

$$R = m_1 (a + g).$$

Из примера видно, как упрощается решение задачи с помощью общего уравнения механики.

Пример 20.2. **Применение общего уравнения механики в случае неидеальных связей.**

Теперь следует применять уравнение (20.3а). Применим его к задаче, рассмотренной в примере 13.1. Выбирая виртуальные перемещения в направлении движения тел системы (см. рис. 13.1), имеем уравнение

$$-k m_1 g \delta r_1 - k m_2 g \delta r_2 + m_3 g \delta r_3 - m_1 \ddot{r}_1 \delta r_1 - m_2 \ddot{r}_2 \delta r_2 - m_3 \ddot{r}_3 \delta r_3 = 0.$$

Учитывая связь

$$\delta r_1 = \delta r_2 = \delta r_3, \; \ddot{r}_1 = \ddot{r}_2 = \ddot{r}_3 = a,$$

сокращая на $\delta r$, окончательно получаем:

$$a = \frac{g[m_3 - k(m_1 + m_2)]}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Из анализа снова исключена часть сил реакций — натяжение нитей. Их можно найти, применяя общее уравнение к движению каждого тела. Например,

$$-k m_1 g + F_1 - m_1 a = 0,$$
$$F_1 = m_1 (a + kg).$$

Пример 20.3. **Расчет даламберовых сил инерции.**

Рассмотрим фиктивные силы инерции, которые следует приложить к твердому телу, чтобы оно при наличии заданных сил находилось в равновесии.

Если тело массой $m$ движется поступательно с ускорением $\vec{a}$, то к его центру масс прикладывается даламберова сила инерции:

$$\vec{F}^{(и)} = -m\vec{a}.$$

Вопрос о даламберовых силах инерции при вращении тела решим для случая

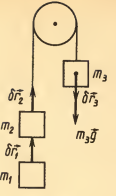



Рис. 20.1.

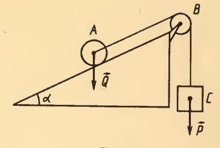



Рис. 20.2.

вращения вокруг оси, не изменяющей своего направления в пространстве. Используя пример 17.1, имеем:

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M},$$

где $I$ — момент инерции относительно данной оси, а $M$ — момент приложенных сил. Следовательно, нужно учитывать только главный момент тангенциальных сил инерции, который равен:

$$\vec{M}^{(\text{и})} = -I\vec{\varepsilon}.$$

Пример 20.4. **Применение общего уравнения к сложной системе.** Каток $A$ весом $Q$, скатываясь по наклонной плоскости вниз, поднимает с помощью невесомой нерастяжимой нити, переброшенной через блок $B$, груз $C$ весом $P$ (рис. 20.2). При этом блок $B$ вращается вокруг неподвижной оси $O$, перпендикулярной к его плоскости. Каток $A$ и блок $B$ — однородные круглые диски одинакового веса и радиуса. Наклонная плоскость образует угол $\alpha$ с горизонтом. Определить ускорение оси катка.

Для составления общего уравнения механики (20.3) рассмотрим вначале заданные силы, приложенные к системе. Это сила тяжести, приложенная к скатывающемуся катку $A$, и сила тяжести, приложенная к поднимаемому грузу $C$.

Каток $A$ совершает поступательное и вращательное движение. Ускорение $\vec{a}$ оси катка, которое и надо найти, является поступательным ускорением катка. В своем вращательном движении каток обладает угловым ускорением, которое обозначим $\vec{\varepsilon}$. Оно направлено перпендикулярно плоскости чертежа к нам. Следовательно, к оси катка надо приложить даламберову силу инерции

$$\vec{F}_A^{(\text{и})} = -\frac{Q}{g}\vec{a},$$

а к катку — момент тангенциальных сил инерции, т. е.

$$\vec{M}_A^{(\text{и})} = -I\vec{\varepsilon} = -\frac{1}{2}\frac{Q}{g}r^2\vec{\varepsilon},$$

где $r$ — радиус катка и $\varepsilon = \dfrac{a}{r}$.

Блок $B$ совершает только вращательное ускоренное движение; к нему прикладываем момент тангенциальных сил инерции:

$$\vec{M}_B^{(\text{и})} = \vec{M}_A^{(\text{и})},$$

так как центральные моменты инерции обоих дисков одинаковы и тангенциальное ускорение точек на поверхности диска $B$ равно ускорению оси диска $A$.

Груз $C$ совершает только поступательное ускоренное движение; к нему приложим

даламберову силу инерции:

$$F_c = -\frac{P}{g}\vec{a}.$$

В качестве виртуального перемещения выберем бесконечно малое перемещение $ds$ оси катка. Теперь составим общее уравнение механики:

$$Q\sin\alpha ds - Pds - \frac{Q}{g}ads - 2\frac{1}{2}\frac{Q}{g}r^2\frac{a}{r}\frac{ds}{r} - \frac{P}{g}ads = 0.$$

Отсюда

$$a = g\frac{Q\sin\alpha - P}{2Q + P}.$$

Считая, что система находится в фиктивном даламберовом равновесии, легко определить силы натяжения нитей. Очевидно, они равны геометрической сумме сил, приложенных к одному из концов данного участка нити. Сила натяжения в сечении нити $AB$ определяется равенством

$$F_{AB} = -Q\sin\alpha + F_A^{(\text{и})},$$

а в сечении нити $BC$ равенством

$$F_{BC} = P + F_C^{(\text{и})}.$$

Задача решена.

**20.2. Уравнения Лагранжа.** На примерах предыдущего параграфа можно убедиться в том, что с помощью общего уравнения механики значительно упрощается решение задач на движение систем тел, связанных между собой. Но на этом применение общего уравнения механики не заканчивается; из него можно вывести динамические уравнения в обобщенных координатах, упростить анализ движения систем, исключая из них связи.

Применим метод обобщенных координат для получения дифференциальных уравнений движения из общего уравнения механики. Метод обобщенных координат приводит к исключительно важному результату. Он дает *общий вид дифференциальных уравнений движения в обобщенных координатах, называемых уравнениями Лагранжа* (второго рода). Эти уравнения позволяют для каждой задачи на несвободную систему пользоваться наиболее удобными и естественными величинами при описании движения системы, исключая из рассмотрения связи и силы реакции. Лагранжевы уравнения оказываются полезными и для свободных тел и точек, так как имеют *инвариантную* (скалярную) форму во всех системах координат, а это позволяет легко составить уравнения в наиболее удобной системе координат, не пользуясь громоздкими формулами перехода (например, от декартовых к сферическим).

Математическая задача заключается в преобразовании уравнения (20.3) к независимым параметрам $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$ — обобщенным координатам механической системы, связанным с декартовыми координатами, заданными формулами преобразования (19.3). Прежде всего выражаем вариации декартовых координат через вариации обобщенных. Получаем соотношения (19.7). После подстановки найденных вариаций в общее уравнение механики (20.4) изменим порядок суммирования и введем сокращенные обозначения (19.8)

для обобщенных сил. Получим следующий результат:

$$\sum_{k=1}^{s} Q_k \delta q_k - \sum_{k=1}^{s} \delta q_k \sum_{i=1}^{n} m_i \left( \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) = 0. \qquad (20.5)$$

Для завершения преобразоваиия остается выразить здесь вторые производные декартовых координат через обобщеииые. Это преобразоваиие проводим способом, указаииым Лагранжем. Диффереицируя по времеии формулы преобразоваиия (19.3), получаем:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x}_i &= \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t}, \\ \dot{y}_i &= \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial y_i}{\partial t}, \\ \dot{z}_i &= \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial z_i}{\partial t}. \end{aligned} \right. \qquad (20.6)$$

*Производные обобщенных координат по времени* $q_1, q_2, \ldots, q_s$ *называют обобщенными скоростями* (см. § 1). Оии действительио дают обобщение поиятию скорости, так как в зависимости от смысла соответствующей координаты могут представлять угловые скорости, секториые и др. Так как частные производиые

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_k}, \ \frac{\partial y_i}{\partial q_k}, \ \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \ -$$

известные функции обобщеииых коордииат по времеии, то формулы (20.6) показывают, что производные декартовых координат по времени являются *линейными функциями* обобщеииых скоростей. Заметим, если связи стациоиариые, то время $t$ ие входит в формулы преобразоваиия координат (19.3) и производиые декартовых координат по времеии являются *линейными однородными* функциями обобщенных скоростей.

Для дальнейшего преобразования уравнеиия (20.3) отметим существование следующих тождеств:

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} &= \frac{d}{dt}\left( \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) - \dot{x}_i \frac{d}{dt}\left( \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right), \\ \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} &= \frac{d}{dt}\left( \dot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \right) - \dot{y}_i \frac{d}{dt}\left( \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \right), \\ \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} &= \frac{d}{dt}\left( \dot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) - \dot{z}_i \frac{d}{dt}\left( \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right). \end{aligned} \right. \qquad (20.7)$$

Далее эти тождества преобразуем, пользуясь (20.6). Обобщеииые коордииаты $q_k$ и обобщеииые скорости $\dot{q}_k$ иезависимы. Поэтому, составляя частные производиые по обобщеииым скоростям от равенства (20.6), приходим к тождествам

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial y_i}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial z_i}{\partial q_k}. \qquad (20.8)$$

Дифференцируя равенства (20.6) частным образом по какой-либо

обобщенной координате $q_k$, имеем:

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_1 \partial q_k}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_2 \partial q_k}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_s \partial q_k}\dot{q}_s + \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial q_k}.$$

С другой стороны, $\frac{\partial x_i}{\partial q_k}$ есть функция обобщенных координат по времени, т. е. является сложной функцией времени, зависящей от времени через промежуточные функции $q_1(t)$, $q_2(t)$, ..., $q_n(t)$ (и явно). Составляя полную производную по времени этой функции по обычным правилам, получаем следующий результат:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial t}.$$

Правые части двух последних равенств одинаковые, что указывает на существование следующего тождества:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k}. \qquad (20.9)$$

Тождества (20.8) и (20.9) позволяют представить первое тождество (20.7) в другом виде:

$$\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k}\right) - \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\,\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{\dot{x}_i^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\dot{x}_i^2}{2}\right).$$

Аналогичные преобразования имеют место и для остальных двух тождеств (20.7). После умножения каждого из них на массу $i$-й точки $m_i$ суммируем почленно и получаем важное равенство:

$$m_i\left(\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right) = \frac{d}{dt}\,\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left[m_i \frac{\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2}{2}\right] - \frac{\partial}{\partial q_k}\left[m_i \frac{\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2}{2}\right].$$

Выражения, стоящие в нем в квадратных скобках, представляют собой кинетическую энергию $T_i$ $i$-й точки системы. По этой причине последнее равенство можно записать кратко:

$$m_i\left(\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right) = \frac{d}{dt}\,\frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T_i}{\partial q_k}.$$

Внесем это выражение в общее уравнение механики (20.5), после чего последнее приобретает следующий вид:

$$\sum_{k=1}^{s} Q_k \delta q_k - \sum_{k=1}^{s} \delta q_k \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\,\frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T_i}{\partial q_k}\right) = 0.$$

Обозначив через $T = \sum_{i=1}^{n} T_i$ кинетическую энергию системы, записываем уравнение в виде:

$$\sum_{k=1}^{s}\left(Q_k - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial T}{\partial q_k}\right)\delta q_k = 0.$$

Вариации обобщенных координат — произвольные и независимые величины, и равенство нулю написанной суммы возможно только при обращении в нуль сомножителей при вариациях обобщенных координат. Приравнивание их нулю приводит нас к искомым дифференциальным уравнениям движения системы в обобщенных координатах — *уравнениям Лагранжа:*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \ (k = 1,\ 2,\ ...,\ s). \tag{20.10}$$

Для составления дифференциальных уравнений движения конкретной механической системы с помощью (20.10) необходимо иметь выражение кинетической энергии в выбранных координатах и значение обобщенных сил. Тогда составление дифференциальных уравнений сводится к выполнению операций дифференцирования, указанных в общей форме уравнений (20.10). Способ нахождения обобщенных сил рассмотрен ранее (§ 19) как переход от декартовых координат к обобщенным. Аналогичное преобразование может быть выполнено и для кинетической энергии (см. пример 20.8). Однако эти преобразования имеют скорее теоретический, а не практический смысл. На практике необходимые величины определяют, минуя указанные преобразования.

Пример 20.5. **Составление и решение уравнений Лагранжа.**

В зацеплении зубчатых колес, показанном на рисунке 19.3, колесо *1* приводится в движение моментом $M_1$. К колесу *2* приложен момент сопротивления $M_2$ и к колесу *3* — момент сопротивления $M_3$. Найти угловое ускорение первого колеса, считая колеса однородными дисками, массы которых $m_1$, $m_2$, $m_3$ и радиусы $r_1$, $r_2$, $r_3$.

Если бы каждое колесо могло вращаться самостоятельно (связи отбрасываем), то пришлось бы ввести три независимых угла поворота: $\varphi_1$, $\varphi_2$ и $\varphi_3$. Однако можно написать два уравнения связей:

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = -\frac{r_1}{r_2},\ \frac{\varphi_3}{\varphi_2} = -\frac{r_2}{r_3}.$$

Система колес имеет одну степень свободы, и в качестве обобщенной координаты целесообразно выбрать угол поворота $\varphi_1$ первого колеса. Уравнение Лагранжа имеет вид:

$$\frac{d}{dT}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = Q_1.$$

Кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий вращения трех колес, которые находим по формуле (18.5): $T = \frac{1}{2}(I_1\dot{\varphi}_1^2 + I_2\dot{\varphi}_2^2 + I_3\dot{\varphi}_3^2)$.

Пользуясь уравнениями связи, записываем кинетическую энергию как функцию только $\dot{\varphi}_1$: $T = \frac{1}{4}(m_1 + m_2 + m_3)\,r_1^2\dot{\varphi}_1^2$.

Для определения обобщенной силы пользуемся выражением виртуальной работы. За виртуальное перемещение выбираем поворот колеса вправо на угол $\delta\varphi_1$. Виртуальная работа находится по формуле $\delta A_1 = M_1\delta\varphi_1 - M_2\delta\varphi_2 - M_3\delta\varphi_3$.

Исключаем зависимые вариации. Для этого варьируем уравнения связи. Получаем:

$$\delta A_1 = \left( M_1 - \frac{r_1}{r_2}M_2 - \frac{r_1}{r_3}M_3 \right)\delta\varphi_1.$$

Рассчитываем обобщенную силу:

$$Q_1 = \frac{\delta A_1}{\delta\varphi_1} = M_1 - \frac{r_1}{r_2}M_2 - \frac{r_1}{r_3}M_3.$$

Выполняя указанные в уравнении Лагранжа дифференцирования, найдем угловое ускорение первого колеса:

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{2\left(M_1 - \dfrac{r_1}{r_2}M_2 - \dfrac{r_1}{r_3}M_3\right)}{(m_1 + m_2 + m_3)\,r_1^2}.$$

Далее нетрудно найти угловые ускорения остальных колес.

Пример 20.6. **Применение уравнения Лагранжа для получения уравнений движения материальной точки в разных системах координат.**

В сферических координатах кинетическая энергия точки (см. пример 1.4) вычисляется по формуле $T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2)$.

Принимая $r$, $\vartheta$, $\varphi$ за обобщенные координаты, имеем с помощью (20.10) уравнения движения:

$$\begin{cases} m[\ddot{r} - r(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2)] = Q_r, \\ m\left[\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\vartheta}) - r^2\sin\vartheta\cos\vartheta\dot{\varphi}^2\right] = Q_\vartheta, \\ m\dfrac{d}{dt}(r^2\sin^2\vartheta\dot{\varphi}) = Q_\varphi. \end{cases} \qquad (а)$$

Нетрудно найти и обобщенные силы (формулы (19.8)):

$$\begin{cases} Q_r = F_x\sin\vartheta\cos\varphi + F_y\sin\vartheta\sin\varphi + F_z\cos\vartheta = F_r, \\ Q_\theta = F_x r\cos\vartheta\cos\varphi - F_y r\cos\vartheta\sin\varphi - F_z r\sin\vartheta = rF_\vartheta, \\ Q_\varphi = -F_x r\sin\vartheta\sin\varphi + F_y\sin\vartheta\cos\varphi = r\sin\vartheta F_\varphi. \end{cases} \qquad (б)$$

Уравнения движения составлены. Сравнивая (а) и (б), легко получаем приведенные ранее в кинематике формулы ускорения в сферической системе:

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2), \\ a_\vartheta = \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\vartheta}) - r\sin\vartheta\cos\vartheta\dot{\varphi}^2, \\ a_\varphi = \dfrac{1}{r\sin\vartheta}\dfrac{d}{dt}(r^2\sin^2\vartheta\dot{\varphi}). \end{cases}$$

В цилиндрических координатах (см. пример 1.5) кинетическая энергия точки имеет вид:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2).$$

В координатах $\rho$, $\varphi$, $z$ уравнения Лагранжа (20.10) таковы:

$$\begin{cases} m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = Q_\rho, \\ m\dfrac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}) = Q_\varphi, \\ m\ddot{z} = Q_z. \end{cases}$$

Обобщенные силы находим с помощью формулы (19.8) и формул перехода от декартовых к цилиндрическим координатам ($x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$):

$$\begin{cases} Q_\rho = F_x\cos\varphi + F_y\sin\varphi = F_\rho, \\ Q_\varphi = -F_x\rho\sin\varphi + F_y\rho\cos\varphi = \rho F_\varphi, \\ Q_z = F_z. \end{cases}$$

Уравнения движения составлены.

Пример 20.7. **Лагранжевы уравнения движения свободного твердого тела.**

Положение твердого тела определяется шестью независимыми координатами $x_0$, $y_0$, $z_0$, $\psi$, $\theta$, $\varphi$. Если взять их в качестве обобщенных координат, то искомые уравнения будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_0} - \frac{\partial T}{\partial x_0} &= Q_{x_0}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_0} - \frac{\partial T}{\partial y_0} &= Q_{y_0}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_0} - \frac{\partial T}{\partial z_0} &= Q_{z_0}, \end{aligned}\right\} (а) \qquad \left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial T}{\partial \psi} &= Q_\psi, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= Q_\varphi, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} &= Q_\theta. \end{aligned}\right\} (б)$$

Первые три уравнения описывают поступательное движение твердого тела, а последующие — вращательное.

Система уравнений поступательного движения упрощается, если принять за полюс центр масс тела $C$. Как видно из формулы (18.2), кинетическая энергия не будет зависеть от координат центра масс:

$$\frac{\partial T}{\partial x_c} = \frac{\partial T}{\partial y_c} = \frac{\partial T}{\partial z_c} = 0.$$

Кроме того, обобщенными силами будут проекции главного вектора сил, приложенных к твердому телу, т. е.

$$Q_x = F_x,\ Q_y = F_y,\ Q_z = F_z.$$

Поэтому уравнения (а) поступательного движения твердого тела можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_c} = F_x,\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_c} = F_y,\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_c} = F_z.$$

Используя формулу для кинетической энергии (18.2), окончательно приходим к уравнениям движения центра масс:

$$ma_{cx} = F_x,\ ma_{cy} = F_y,\ ma_{cz} = F_z,$$

с которыми встречались в § 17.

Уравнения вращательного движения получим, если воспользуемся выражением для кинетической энергии тела (18.3) и подставим в него проекции угловой скорости на оси подвижной системы, выражающейся формулами (2.13). Получим:

$$T = \frac{I_1}{2}(\dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\psi + \dot{\vartheta}\cos\psi)^2 + \frac{I_2}{2}(\dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\psi - \dot{\vartheta}\sin\psi)^2 + \frac{I_3}{2}(\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi})^2.$$

Обобщенными силами являются моменты сил относительно осей и линии узлов (см. рис. 2.2):

$$Q_\psi = M_\psi,\ Q_\varphi = M_\varphi,\ Q_\vartheta = M_\vartheta.$$

Уравнения движения (б) после подстановки в них выражения через углы Эйлера оказываются весьма сложными. В § 17 рассматривались динамические уравнения Эйлера (17.5) в проекциях на оси подвижной системы. Они также приводятся к переменным $\psi$, $\vartheta$, $\varphi$. Однако из уравнений (17.5) только третье уравнение совпадает с уравнением Лагранжа (б) для переменной $\psi$, ибо только обобщенная сила $Q_\psi$ совпадает с проекцией момента на ось $Oz'$. Остальные два уравнения написаны для проекций моментов на другие оси: $Ox'$ и $Oy'$. Уравнения решены для немногих частных случаев, например для свободного симметричного волчка (см. пример 17.3).

Пример 20.8. **Общее выражение кинетической энергии в обобщенных координатах.**

Во всех предыдущих примерах выражение кинетической энергии в обобщенных координатах оказывалось заранее известным или находилось в частном случае. Рассмотрим в общем виде преобразование выражения кинетической энергии к обобщенным координатам. Исходим из известного выражения кинетической энергии в декартовых координатах:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$$

и формул преобразования декартовых координат к обобщенным (19.3). Пользуясь формулами (20.6), выражающими производные декартовых координат по времени через обобщенные скорости, составляем выражения для квадратов производных декартовых координат, входящих в выражение кинетической энергии. Применяя правило сокращенного возведения в квадрат суммы, получаем:

$$\dot{x}_i^2 = \sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_k\dot{q}_j + 2\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial t}\dot{q}_k + \left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2.$$

Аналогичные выражения получаются для $\dot{y}_i^2$ и $\dot{z}_i^2$. После подстановки найденных выражений в выражение кинетической энергии в декартовых координатах мы должны получить искомый результат. Для того чтобы не записывать его в подробной, очень громоздкой форме, предварительно введем сокращенные обозначения:

$$\left\{\begin{aligned} A_{kj} &= \sum_{i=1}^{n} m_i\left( \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial y_i}{\partial q_k}\frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial z_i}{\partial q_k}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right), \\ A_k &= \sum_{i=1}^{n} m_i\left( \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial y_i}{\partial q_k}\frac{\partial y_i}{\partial t} + \frac{\partial z_i}{\partial q_k}\frac{\partial z_i}{\partial t}\right), \\ A_0 &= \sum_{i=1}^{n} m_i\left[ \left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_i}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_i}{\partial t}\right)^2\right]. \end{aligned}\right. \tag{20.11}$$

Указанные выражения являются известными функциями обобщенных координат и времени. Использование этих сокращенных обозначений приводит нас к окончательному выражению кинетической энергии системы в обобщенных координатах:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1;j=1}^{s}\sum^{s} A_{kj}\dot{q}_k\dot{q}_j + \sum_{k=1}^{s} A_k\dot{q}_k + A_0. \tag{20.12}$$

Кинетическая энергия оказывается *квадратичной функцией обобщенных скоростей*, коэффициентами в которой являются функции обобщенных координат и времени.

Когда движение системы ограничено стационарными связями, выражение кинетической энергии значительно упрощается. В этом случае формулы преобразования (19.3) не содержат времени и частные производные декартовых координат по времени обращаются в нуль. В нуль обращаются и коэффициенты $A_k$ и $A_0$ при линейных членах квадратичной формы (20.12). Кинетическая энергия в этом случае является *однородной* квадратичной функцией обобщенных скоростей:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k,j}^{s} A_{kj}\dot{q}_k\dot{q}_j.$$

Коэффициенты при квадратах и произведениях обобщенных скоростей $A_{kj}$ называются *коэффициентами инерции системы*. В частности, коэффициенты инерции могут представлять *массу, момент инерции* или *произведение инерции системы*.

Из алгебры известно, что однородную квадратичную форму можно привести к сумме квадратов линейным однородным преобразованием. На этом основании утверждаем, что, выбирая новые обобщенные координаты для данной системы, можно получить выражение кинетической энергии в виде чистой *суммы квадратов* обобщенных скоростей, т. е. в виде

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{s} A_{kk}\dot{q}_k^2. \tag{20.13}$$

Обобщенные координаты, в которых кинетическая энергия является однородной квадратной функцией обобщенных скоростей, называются *нормальными* координатами данной механической системы.

При решении конкретных задач приведенными выше общими формулами для кинетической энергии обычно не пользуются. Выражение кинетической энергии в обобщенных координатах часто оказывается возможным записать, используя теорему Кёнига, как это было показано на примерах. Однако общие формулы необходимы в теории.

## § 21. Уравнения Лагранжа для потенциальных и обобщенно-потенциальных сил

**21.1. Потенциальные силы. Лагранжиан.** Дифференциальные уравнения Лагранжа заметно упрощаются, если система находится под действием *потенциальных* сил.

Пусть силы, приложенные к точкам системы, потенциальные. Тогда в соответствии с формулой (19.11) для обобщенных сил имеем их выражения через потенциальную энергию $U = U(q_1 q_2 \ldots q_s,\ t)$:

$$Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k}.$$

Следовательно, обобщенные силы также являются потенциальными. Внесем выражения потенциальных сил в дифференциальные уравнения (20.10). Если примем во внимание, что потенциальная энергия не зависит от обобщенных скоростей, т. е. $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} = 0$, то дифференциальным уравнениям можно придать следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}(T - U) - \frac{\partial}{\partial q_k}(T - U) = 0.$$

Определим функцию обобщенных координат, скоростей и времени равенством

$$L(q_k, \dot{q}_k,\ t) = T - U, \tag{21.1}$$

где $L$ называется *функцией Лагранжа* или *лагранжианом* системы. Тогда уравнения Лагранжа (20.10) движения системы получают следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0\ (k = 1, 2, 3, \ldots, s). \tag{21.2}$$

Для составления дифференциальных уравнений движения системы с потенциальными силами оказывается, таким образом, достаточным знание лагранжиана системы. При стационарных связях и стационарном силовом поле лагранжиан не зависит явно от времени и является функцией только обобщенных координат и скоростей, а при нестационарных связях и нестационарных силах он явно зависит и от времени. Нетрудно видеть, что лагранжиан задается *неоднозначно:* прибавление к нему любой величины, не зависящей от $q_k$ и $\dot{q}_k$ явно, не изменяет уравнений (21.2). Кроме этого, *прибавление полной производной по времени от произвольной функции обобщенных координат также не изменяет уравнений.*

Покажем это. Пусть $f(q_k)$ — произвольная функция. Рассмотрим новый лагранжиан: $L' = L + \frac{d}{dt}f(q_k) = L + \sum_s \frac{\partial f}{\partial q_s}\dot{q}_s$.

Составим для него уравнение (21.2):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial f}{\partial q_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{\partial}{\partial q_k}\sum_s \frac{df}{\partial q_s}\dot{q}_s = 0.$$

Раскрывая скобки и производя дифференцирование по времени во втором слагаемом, имеем:

$$\frac{d}{dt}\frac{dL}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial}{\partial q_k}\sum_s \frac{\partial f}{\partial q_s}\dot{q}_s - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{\partial}{\partial q_k}\sum_s \frac{\partial f}{\partial q_s}\dot{q}_s = 0,$$

т. е. приходим к уравнению для прежней функции Лагранжа $L$, так как члены с суммами взаимно уничтожаются.

В процессе вывода уравнений Лагранжа (20.10) и (21.2) было выполнено преобразование координат (19.3), которое может рассматриваться как переход к любой новой системе координат в той же физической системе отсчета либо переход к другой инерциальной и даже неинерциальной системе отсчета. *В любой системе отсчета и системе координат,* т. е. в любых координатах $q_k$ *уравнения имеют один и тот же вид,* т. е. *они инвариантны по отношению к выбору систем координат и систем отсчета.* Эта выдающаяся особенность уравнений Лагранжа делает их весьма ценными для теории. (Инвариантность уравнений для неинерциальных систем рассмотрена ниже, в примере 21.6.)

Пример 21.1. **Составление лагранжиана для двойного плоского маятника** (рис. 21.1).

Кинетическая и потенциальная энергии являются величинами аддитивными, поэтому функция Лагранжа системы равна сумме функций Лагранжа для точек $m_1$ и $m_2$: $L = L_1 + L_2$. Обозначив угол между отрезком $a$ и вертикалью через $\varphi$, имеем для кинетической энергии точки $T_1 = \frac{1}{2} m_1 a^2 \dot{\varphi}^2$, где скорость находится по формуле составляющей скорости в полярных координатах (1.9). Отсчитав высоту поднятия маятника от точки $O$, получаем потенциальную энергию в виде $U_1 = -m_1 g a \cos\varphi$. Поэтому

$$L_1 = \frac{1}{2} m_1 a^2 \dot{\varphi}^2 + m_1 g a \cos\varphi.$$

Введем угол $\vartheta$ между отрезком $b$ и вертикалью. Чтобы найти кинетическую энергию $T_2$ точки $m_2$, выразим ее декартовы координаты $x_2$ и $y_2$ (начало координат в точке $O$; ось $y$ направлена вниз по вертикали, а ось $x$ — влево по горизонтали) через углы $\varphi$ и $\vartheta$:

$$x_2 = a\sin\varphi + b\sin\vartheta,$$
$$y_2 = a\cos\varphi + b\cos\vartheta,$$

откуда

$$\dot{x}_2 = a\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} + b\cos\vartheta\cdot\dot{\vartheta},\quad \dot{y}_2 = -a\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} - b\sin\vartheta\cdot\dot{\vartheta}.$$

Пользуясь этими выражениями, получаем кинетическую энергию системы:

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{1}{2} m_2[a^2\dot{\varphi}^2 + 2ab\cos((\varphi - \vartheta)\,\dot{\varphi}\dot{\vartheta}) + b^2\dot{\vartheta}^2].$$

Вычитая из нее потенциальную энергию $U_2 = -m_2 g(a\cos\varphi + b\cos\vartheta)$, получим:

$$L_2 = \frac{1}{2} m_2\{a^2\dot{\varphi}^2 + b^2\dot{\vartheta}^2 + 2ab\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\cos(\varphi - \vartheta)\} + m_2 g(a\cos\varphi + b\cos\vartheta).$$

Итак, лагранжиан для двойного плоского маятника найден и имеет вид:

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)a^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 b^2\dot{\vartheta}^2 + m_2 ab\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\cos(\varphi - \vartheta) +$$
$$+ g(m_1 + m_2)a\cos\varphi + m_2 g b\cos\vartheta.$$

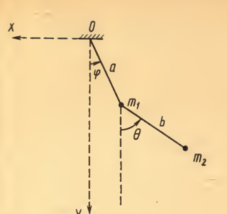
Пример 21.2. **Составление уравнения движения эллиптического маятника.** Он состоит из ползуна массой $m_1$, скользящего без трения по горизонтальной плоскости, и шарика массой $m_2$, соединенного с ползуном стержнем $AB$ длиной $l$. Стержень может вращаться вокруг оси $A$, связанной с ползуном и перпендикулярной к плоскости чертежа (рис. 21.2). Массой стержня пренебречь.

Оба тела можно считать материальными точками. Положение их определяется координатами $x_1$, $y_1$ и $x_2$, $y_2$. Видим, что между ними и углом отклонения стержня от вертикали можно установить связь: $x_2 = l\cos\varphi$, $y_2 = y_1 + l\sin\varphi$.

Система имеет две степени свободы, а за обобщенные координаты целесообразно выбрать $y_1$ и $\varphi$.

Уравнения Лагранжа имеют общий вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} - \frac{\partial L}{\partial y_1} = 0,\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0.$$



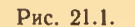



Рис. 21.1.

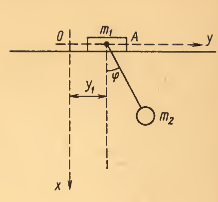



Рис. 21.2.

Составим лагранжиан системы:

$$L = L_1 + L_2 = (T_1 + T_2) - (U_1 + U_2).$$

Потенциальную энергию нормируем условием

$$U = U_1\Big|_{x_1 = 0} + U_2\Big|_{x_2 = 0} = 0.$$

Вычислим теперь кинетическую энергию, потенциальную энергию и лагранжиан:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1\dot{y}_1^2,\ T_2 = \frac{1}{2} m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{1}{2} m_2(\dot{y}_1^2 + 2l\cos\varphi\,\dot{y}_1\dot{\varphi} + l^2\dot{\varphi}^2),$$

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2\dot{\varphi}^2 + m_2 l\cos\varphi\,\dot{y}_1\dot{\varphi},$$

$$U = -m_2 g l\cos\varphi,$$

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2\dot{\varphi}^2 + m_2 l\cos\varphi\,\dot{y}_1\dot{\varphi} + m_2 g l\cos\varphi.$$

Используя найденную функцию Лагранжа, получаем для эллиптического маятника уравнения движения:

$$\frac{d}{dt}\left\{(m_1 + m_2)\,\dot{y}_1 + m_2 l\cos\varphi\,\dot{\varphi}\right\} = 0,$$

$$l\ddot{\varphi} + \cos\varphi\,\ddot{y}_1 + g\sin\varphi = 0.$$

Из первого уравнения сразу следует первый интеграл движения: $(m_1 + m_2)\,\dot{y}_1 + m_2 l\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} = C_1$, который можно использовать при решении уравнений — нахождении $y_1 = y_1(t)$, $\varphi = \varphi(t)$.

Пример 21.3. **Составление уравнений для сферического маятника.**

Он был рассмотрен в примерах (19.3) и (19.8). Функцию Лагранжа найдем, используя формулы скорости в сферических координатах (см. пример 1.4) и формулу потенциальной энергии (см. пример 19.8):

$$L = \frac{ml^2}{2}(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\cdot\dot{\varphi}^2) - mgl\cos\vartheta.$$

Уравнения Лагранжа в координатах $\vartheta$ и $\varphi$ имеют общий вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\vartheta}} - \frac{\partial L}{\partial\vartheta} = 0,\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0,$$

откуда

$$ml^2\ddot{\vartheta} - ml^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \cdot \dot{\varphi}^2 - mgl \sin\vartheta = 0,$$

$$\frac{d}{dt} ml^2 \sin^2\vartheta \cdot \dot{\varphi} = 0.$$

Из второго уравнения сразу следует первый интеграл

$$ml^2 \sin^2\vartheta \cdot \dot{\varphi} = C_1,$$

который нужно использовать далее для нахождения кинематических уравнений движения.

Пример 21.4. **Составление уравнений Лагранжа для свободной точки.** Метод Лагранжа может быть с успехом применен не только к сложным системам со связями, но и к свободной точке, находящейся в потенциальном поле. При этом *сила при описании движения и векторные уравнения заменяются соответственно* функцией Лагранжа и скалярными уравнениями Лагранжа. В качестве примера рассмотрим свободную материальную точку в однородном поле (поле тяготения). За обобщенные координаты возьмем декартовы, оси $Ox$ и $Oy$ расположим в плоскости горизонта, а ось $Oz$ направим вертикально вверх. Располагая функцией Лагранжа

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz,$$

имеем:

$$\frac{d}{dt} m\dot{x} = 0, \quad \frac{d}{dt} m\dot{y} = 0, \quad m\ddot{z} = -mg.$$

Это рассматривавшиеся ранее, в примере 6.1, уравнения свободного падения. Их интегралы находятся разделением переменных:

$$x = x_0 + v_{0x}t, \ y = y_0 + v_{0y}t, \ z = z_0 + v_{0z}t - \frac{gt^2}{2}.$$

(Уместно заметить, что речь о векторах сил в задаче не шла — их заменила функция Лагранжа. Не было и проектирования векторных уравнений на оси.)

**21.2. Уравнение Лагранжа для обобщенно-потенциальных сил.** В § 21 мы ввели функцию Лагранжа, с помощью которой задается движение системы с потенциальными силами, зависящими только от координат и времени. Рассмотрим теперь силы, зависящие также от скорости и удовлетворяющие условию:

$$Q_k(\dot{q}_k, q_k, t) = \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial U}{\partial q_k}, \qquad (21.3)$$

где $U(\dot{q}_k, q_k, t)$ носит название *обобщенного потенциала*. Такие силы называются *обобщенно-потенциальными.*

Подставляя в уравнение Лагранжа (20.10) вместо обычной силы обобщенно-потенциальную, приведем уравнение к виду

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L'}{\partial q_k} = 0. \qquad (21.4)$$

Это уравнение по форме не отличается от уравнения для обычных потенциальных сил, но его лагранжиан $L'$, имея прежние переменные, представляет разность кинетической энергии и обобщенного потенциала, т. е.

$$L' = T - U(q_k, \dot{q}_k, t). \qquad (21.5)$$

Так как запись лагранжиана с обобщенным потенциалом в общем виде не отличается от записи с обычным, то для уравнения Лагранжа

с обобщенно-потенциальными снламн нет надобности вводить специальные обозначения:

$$L = L(q_k, \dot{q}_k, t), \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0.$$

Так как обобщеиио-потеициальиая сила ие зависит от обобщенных ускорений, то обобщениый потеициал является линейиой фуикцией обобщеииых скоростей, что видио из определеиия обобщеиио-потеициальиой силы. Обобщениый потенциал иапишем в следующем виде:

$$U = \sum_{k=1}^{s} a_k(q_k, t)\dot{q}_k + U_0(q_k, t) = U_1 + U_0.$$

Здесь $U_1 = U_1(\dot{q}_k, q_k, t)$ — потеициальиая эиергия, зависящая от скорости, $U_0(q_k, t)$ — обычиая потеициальиая эиергия, $a_k(q_k, t)$ — коэффициеит.

Кииетическая эиергия является квадратичиой фуикцией обобщеииых скоростей и выражается формулой (20.12). Обозиачим слагаемые в этой формуле соответствеино через $T_2$, $T_1$, $T_0$ и запишем формулу кратко:

$$T = T_2 + T_1 + T_0.$$

Обобщеиый лаграижиаи является квадратичиой фуикцией обобщеииых скоростей вида

$$L = T_2 + (T_1 - U_1) + (T_0 - U_0). \tag{21.6}$$

Индексы показывают степень обобщеииой скорости, от которой зависят слагаемые.

Обобщенно-потенциальные снлы резко расширяют сферу прнменення уравненнй Лагранжа (в форме (21.2)), нбо *фундаментальные силы природы (гравитационные и электромагнитные) относятся соответственно к потенциальным и обобщенно-потенциальным.* Обобщенно-потенцнальными являются и *силы инерции,* что позволяет прнменять уравнення Лагранжа в неннерцнальных снстемах отсчета.

В общем случае, кроме потенциальных и обобщенно-потенцнальных снл, в снстеме действуют непотенциальные дисснпативные снлы, рассеивающне механнческую энергню. Располагая лагранжианом для обобщенно-потенциальных сил, имеем уравнения Лагранжа для общего случая:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k, \tag{21.7}$$

где через $Q_k$ обозначаем все обобщенные непотенцнальные силы.

Пример 21.5. **Сила Лореица.**

Рассмотрим важиейший пример обобщеиио-потеициальиой силы. В электродииамике показывается, что иа точечиый электрический заряд $q$, движущийся в электромагиитиом поле со скоростью $\vec{v}$, действует сила Лореица:

$$\vec{F}_л = q\vec{E} + q[\vec{v}\,\vec{B}],$$

где

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$$

$\varphi = \varphi(x, y, z, t)$, $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z, t)$ — скаляриый и векториый потеициалы поля. Выражеиие

$$U = q\varphi - q\vec{A}\vec{v} \tag{21.8}$$

оказывается обобщенным потенциалом для заряда в электромагнитном поле. В этом убеждаемся, находя обобщенно-потенциальную силу по формуле (21.3):

$$\vec{Q} = -q\frac{d}{dt}\vec{A} - q\cdot\operatorname{grad}\varphi + q\cdot\operatorname{grad}(\vec{A}\,\vec{v}).$$

После выполнения действий и с помощью формул векторного анализа (приложение II, № 7) имеем:

$$\vec{Q} = -q\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - q(\vec{v}\,\nabla)\vec{A} + q(\vec{v}\,\nabla)\vec{A} +$$

$$+ q[\vec{v}\operatorname{rot}\vec{A}] - q\cdot\operatorname{grad}\varphi = q\vec{E} + q[\vec{v}\vec{B}] = \vec{F}_{л}.$$

Так как кинетическая энергия свободной материальной точки в данном случае известна, т. е.

$$T = \frac{mv^2}{2},$$

то нетрудно убедиться, что уравнения Лагранжа (20.10) дают:

$$\frac{d}{dt}m\vec{v} = q\vec{E} + q[\vec{v}\,\vec{B}],$$

т. е. уравнение движения заряженной материальной точки в электромагнитном поле.

Пример 21.6. **Преобразование функции Лагранжа к неинерциальной системе отсчета.**

Рассмотрим материальную точку $m$, находящуюся в потенциальном поле. В неподвижной инерциальной системе отсчета

$$L = \frac{mv^2}{2} - U(\vec{r}). \tag{21.9}$$

Перейдем к произвольно движущейся системе. Из формул (3.5) и (3.6) видно, что

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0 + [\vec{\omega}\,\vec{r}'],$$

а

$$U(\vec{r}) = U(\vec{r}').$$

Выполняя подстановку значений $\vec{v}$ и $U$ в (21.9), получаем выражение функции Лагранжа в инерциальной системе:

$$L' = \frac{mv'^2}{2} + \frac{m}{2}[\vec{\omega}\,\vec{r}']^2 + m\vec{v}'[\vec{\omega}\,\vec{r}'] + \frac{1}{2}mv_0^2 + m\vec{v}_0\left\{\vec{v}' + [\vec{\omega}\,\vec{r}']\right\} - U(\vec{r}').$$

Используем тождество

$$\frac{d}{dt}m\vec{r}'\vec{v}_0 - m\vec{r}'\vec{a}_0 = m\vec{v}_0\left\{\vec{v}' + [\vec{\omega}\,\vec{r}']\right\},$$

для проверки которого следует учесть, что $\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}' + [\vec{\omega}\,\vec{r}']$. Полная производная по времени не влияет на уравнение, поэтому в лагранжиане отбрасываем производную. Отбрасываем и слагаемое $\frac{1}{2}mv_0^2$, которое для переменных $\vec{r}'$ и $\vec{v}'$ является постоянной величиной. Окончательно

$$L' = \frac{m\vec{v}'^2}{2} + \frac{m}{2}[\vec{\omega}\,\vec{r}']^2 - m\vec{r}'\vec{a}_0 - U(\vec{r}') + m\vec{v}'[\vec{\omega}\,\vec{r}'].$$

Запишем для найденной функции Лагранжа уравнения Лагранжа, предполагая, что они справедливы в неинерциальной системе

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial\vec{v}'} - \frac{\partial L'}{\partial\vec{r}'} = 0$$

(векторная форма записи частных производных является сокращением записи трех уравнений в проекциях, например, декартовых, или $\frac{\partial L'}{\partial \vec{v}} = \text{grad}_{\vec{v}} L'$, $\frac{\partial L'}{\partial \vec{r}} = \text{grad}_{\vec{r}} L'$. Для нахождения производных функций $L'$ удобно записать сначала ее (частные) дифференциалы по переменным $\vec{r}'$ и $\vec{v}'$:

$$d_v L' = m\vec{v}' d\vec{v}' + m d\vec{v}' [\vec{\omega}\, \vec{r}'],$$

$$d_r L' = m [\vec{\omega}\, \vec{r}'] [\vec{\omega} d\vec{r}'] + m\vec{v}' [\vec{\omega} d\vec{r}'] - m d\vec{r}' \vec{a}_0 - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} d\vec{r}'.$$

После этого находим само уравнение:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}'} - m\vec{a}_0 - m [\vec{\omega} [\vec{\omega}\, \vec{r}']] - m [\dot{\vec{\omega}}\, \vec{r}'] - 2m [\vec{\omega}\, \vec{v}'].$$

Сравнивая найденное уравнение с изученным в § 7, заключаем, что, во-первых, уравнения Лагранжа *инвариантны* по отношению к переходам в неинерциальные системы, а во-вторых, *силы инерции принадлежат к обобщенно-потенциальным.*

## § 22. Законы сохранения и уравнения Лагранжа

**22.1. Функция Гамильтона системы.** Динамические уравнения механики, основанные на законах Ньютона, приводят к первым интегралам движения или к законам сохранения энергии, импульса, момента импульса системы материальных точек (глава IV). Также обстоит дело и с уравнениями Лагранжа, описывающими движение системы в обобщенных координатах: они приводят к сохранению некоторых величин, носящих название обобщенной энергии и обобщенных импульсов.

Рассмотрим систему, в которой обобщенные силы удовлетворяют условию (19.11) или (21.3), т. е. они потенциальные или обобщенно-потенциальные. Для получения первых интегралов движения умножим каждое из уравнений (21.2) на соответствующую обобщенную скорость и просуммируем результаты. Получаем:

$$\sum_{k=1}^{s} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) \dot{q}_k - \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k = 0,$$

но так как

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) \dot{q}_k = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k,$$

то уравнение принимает вид:

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - \sum_{k=1}^{s} \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k\right] = 0.$$

Лагранжиан является функцией обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени, т. е.

$$L = L(q_k, \dot{q}_k, t),$$

поэтому имеет место тождество

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{k=1}^{s} \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k\right] + \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Подставляя значение суммы из последнего равенства в преды-

дущее уравнение, имеем:

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - \frac{dL}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = 0. \quad (22.1)$$

Объединяя два первых члена, можно ввести функцию

$$H = \sum_{k=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L, \quad (22.2)$$

которая называется *обобщенной энергией системы* или *функцией Гамильтона системы (гамильтонианом)*. Гамильтониан системы содержит в себе информацию о системе, как и лагранжиан. В теоретической физике он используется для описания систем не только в классической механике, но и в других разделах; особенно широко — в квантовой механике.

**22.2. Первые интегралы уравнений Лагранжа.** Выполним вывод первых интегралов из уравнений Лагранжа. Введя функцию Гамильтона (22.2) в уравнение (22.1), получим теорему об изменении обобщенной энергии:

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{dt}. \quad (22.3)$$

*Если функция Лагранжа L от времени явно не зависит, то обобщенная энергия системы сохраняется во времени, т. е.*

$$H = \text{const}. \quad (22.4)$$

Рассмотрим этот важнейший закон для потенциальных сил. Независимость функций Лагранжа от времени означает стационарность связей и стационарность сил, т. е.

$$L = T - U(q_k).$$

Поэтому

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$$

и функция Гамильтона может быть записана в виде

$$H = \sum_{k=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L.$$

Так как $T$ — однородная квадратичная функция обобщенных скоростей, то

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k = 2T,$$

откуда обобщенная энергия равна *механической энергии* системы:

$$H = 2T - T + U = T + U. \quad (22.5)$$

При этом она сохраняется в потенциальном поле.

Рассмотрим структуру функции Гамильтона в общем случае, т. е. для нестационарных полей и связей, но для обобщенно-потенциальных сил. В обобщенный

лагранжиан (21.6) подставим значения $T$ из формулы (20.12) и получим:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{kj}^{s} A_{kj}\dot{q}_k\dot{q}_j + \sum_{k}^{s} A_k\dot{q}_k + A_0 - \sum_{k}^{s} a_k\dot{q}_k - U_0 = T_2 + T_1 + T_0 - U_1 - U_0.$$

Выполним необходимые для нахождения гамильтониана по формуле (22.2) преобразования:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i}^{s} A_{kj}\dot{q}_j + A_k - a_k,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k = \sum_{j}^{s} (A_{kj}\dot{q}_j\dot{q}_k + A_k\dot{q}_k - a_k\dot{q}_k),$$

$$\sum_{k=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k = \sum_{kj}^{s} A_{kj}\dot{q}_k\dot{q}_j + \sum_{k}^{s} A_k\dot{q}_k - \sum_{k}^{s} a_k\dot{q}_k = 2T_2 + T_1 - U_1.$$

Наконец,

$$H = T_2 - T_0 + U_0. \tag{22.6}$$

Таково выражение обобщенной энергии системы при обобщенно-потенциальных силах и нестационарных связях. Энергия сохраняется, если стационарны силы и связи. В таком случае кинетическая энергия является однородной квадратичной функцией скоростей и выражение для гамильтониана упрощается:

$$H = T_2 + U_0 = \text{const}.$$

Таков один из первых интегралов уравнений Лагранжа, или интеграл обобщенной энергии.

*Полная механическая энергия* для системы в общем случае может быть определена как сумма кинетической и потенциальной энергий (в обобщенных координатах), т. е.

$$E = T_2 + T_1 + T_0 + U_1 + U_0.$$

Она *не сохраняется* не только при нестационарных силах и связях, но и при стационарных связях и стационарных обобщенно-потенциальных силах. В последнем случае введенная полная энергия выражается формулой $E = T_2 + U_1 + U_0$ и не сохраняется за счет несохранения $U_1$.

Поэтому данная величина может совсем не рассматриваться, а вместо нее (в случаях сохранения) *называют полной механической энергией обобщенную энергию системы $H$.*

Кроме интегралов обобщенной механической энергии из уравнений Лагранжа вытекают интегралы *обобщенных импульсов.* Снова рассмотрим уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0.$$

Величину

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k \tag{22.7}$$

называют обобщенным импульсом, соответствующим обобщенной координате $q_k$. Уравнения Лагранжа через обобщенные импульсы записываются в виде

$$\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}\ (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ s). \tag{22.8}$$

Лагранжиан может не зависеть от одной или нескольких обоб-

щенных координат, которые называют *циклическими*. С каждой такой координатой связан первый интеграл движения, называемый циклическим. Пусть координата $q_c$ циклическая. Уравнение Лагранжа принимает вид:

$$\dot{p}_c = \frac{\partial L}{\partial q_c} = 0.$$

Отсюда следует циклический интеграл:

$$p_c = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_c} = \text{const}.$$

Механический смысл циклического интеграла может быть различным в зависимости от смысла соответствующей обобщенной координаты. В частных случаях это могут быть законы сохранения *составляющей импульса*, когда обобщенная координата имеет размерность длины, или *момента импульса* для угловой обобщенной координаты.

При обобщенно-потенциальных силах обобщенные импульсы отличаются от обычных и в декартовых координатах. В самом деле, если

$$L = T - U(q, \dot{q}),$$

то

$$p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}, \tag{22.9}$$

где имеется дополнительное слагаемое $-\dfrac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}$ к обычному импульсу свободной точки:

$$\vec{p} = m\vec{v} - \mathrm{grad}_{\vec{v}}\, U. \tag{22.10}$$

Это значит, что в поле обобщенно-потенциальных сил может сохраняться та или иная составляющая не обычного, а обобщенного импульса при условии, что соответствующая проекция силы равна нулю (см. пример 22.3).

**Пример 22.1. Расчет гамильтониана, или обобщенной энергии свободной заряженной точки в электромагнитном поле.**

Пользуясь обобщенным потенциалом для данного случая (см. пример 21.5), имеем функцию Лагранжа:

$$L = \frac{mv^2}{2} - q\varphi + q\vec{A}\vec{v}.$$

Рассчитываем $H$ по формуле (22.2):

$$H = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\vec{v} - L = mv^2 + q\vec{A}\vec{v} - \frac{mv^2}{2} + q\varphi - q\vec{A}\vec{v} = \frac{mv^2}{2} + q\varphi,$$

что можно истолковать как полную механическую энергию заряженной точки в поле. Часть обобщенного потенциала $U_0 = q\varphi$ можно рассматривать как обычную потенциальную энергию точки в силовом поле.

**Пример 22.2. Расчет гамильтониана, или обобщенной энергии свободной (изолированной) материальной точки в релятивистском случае.**

Лагранжиан выражается формулой

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

где $c$ — постоянная, равная скорости света в вакууме.

Произведем расчет $H$:

$$H = \vec{v}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L = \frac{m\vec{v}^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Это выражение называют полной релятивистской энергией материальной точки.

Пример 22.3. **Расчет обобщенного импульса точки в электромагнитном поле.** С помощью функции Лагранжа (см. пример 22.1) вычисляем обобщенный импульс заряженной материальной точки в электромагнитном поле: $\vec{p}_{об} = m\vec{v} + q\vec{A}$. Пусть имеет место однородное постоянное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$. Воспользуемся цилиндрическими координатами и направим ось $Oz$ по вектору индукции магнитного поля. Из рисунка 22.1 видно, что составляющие силы Лоренца (см. пример 21.5), действующие на заряд $q$, таковы:

$$F_\varphi = -qB\dot{\rho}, \quad F_\rho = qB\rho\dot{\varphi},$$

а обобщенные силы (см. пример 20.5):

$$Q_\varphi = -qB\rho\dot{\rho}, \quad Q_\rho = qB\rho\dot{\varphi}.$$

Нетрудно, пользуясь формулой обобщенно-потенциальной силы (21.3), подобрать обобщенный потенциал:

$$U = \frac{1}{2}qB\rho^2\dot{\varphi},$$

приводящий к этим силам. Следовательно, функция Лагранжа в цилиндрических координатах имеет вид:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}qB\rho^2\dot{\varphi}.$$

Циклическими являются координаты $z$ и $\varphi$, т. е. сохраняются обобщенные импульсы:

$$p_z = m\dot{z}, \quad p_\varphi = m\rho^2\dot{\varphi} - \frac{1}{2}qB\rho^2.$$

Пример 22.4. **Интегрирование уравнений сферического маятника.** В примере (21.3) получено выражение для функции Лагранжа, т. е.

$$L = \frac{ml^2}{2}(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2) - mgl\cos\vartheta.$$

Так как лагранжиан явно от времени не зависит, то существует первый интеграл обобщенной энергии:

$$H = \frac{ml^2}{2}(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2) + mgl\cos\vartheta. \qquad (а)$$

Координата $\varphi$ является циклической, и ей соответствует первый интеграл обобщенного импульса:

$$ml^2\sin^2\vartheta\dot{\varphi} = M. \qquad (б)$$

Это интеграл момента импульса относительно оси $Oz$. Выражая $\dot{\varphi}$ из (б) и под-

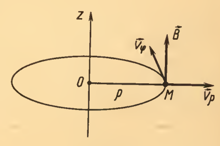



Рис. 22.1.

ставляя в (а), имеем:

$$\frac{ml^2}{2}\dot{\vartheta}^2 + \frac{M^2}{2\,ml^2\sin^2\vartheta} + mgl\cos\vartheta = H,$$

откуда можно найти $\dot{\vartheta}$:

$$\dot{\vartheta} = \sqrt{\frac{2}{ml^2}\left(H - \frac{M^2}{2\,ml^2\sin^2\vartheta} - mgl\cos\vartheta\right)} = \sqrt{\frac{2}{ml^2}(H - U_e)}.$$

Разделяя переменные, получаем кинематическое уравнение движения для $\vartheta$ путем взятия интеграла:

$$t = \int \frac{d\vartheta}{\sqrt{\frac{2}{ml^2}(H - U_e)}} + C_1.$$

Определяя отсюда $dt$ и подставляя в (б), имеем уравнение с разделенными переменными. После интегрирования получаем зависимость между $\varphi$ и $\vartheta$:

$$\varphi = \int \frac{M}{ml^2\sin^2\vartheta}\,\frac{d\vartheta}{\sqrt{\frac{2}{ml^2}(H - U_e)}} + C_2.$$

Это уравнение траектории движения материальной точки по сфере. Если подставить сюда найденную функцию $\vartheta = \vartheta(t)$, то получим второе кинематическое уравнение движения: $\varphi = \varphi(t)$.

Легко найти силу реакции сферы при движении по ней материальной точки. Общее уравнение механики приводит к равенству

$$mg\cos\vartheta + R_r - ma_r = 0,$$

откуда

$$R_r = ma_r - mg\cos\vartheta.$$

Используя выражение для $a_r$ из примера 20.6, получаем:

$$R_r = -\frac{2}{l}H + mg\cos\vartheta$$

— такова реакция сферы.

Пример 22.5. **Вывод закона сохранения энергии в неинерциальной системе отсчета.**

Выберем в некоторой неинерциальной системе в качестве обобщенных декартовы координаты $x'$, $y'$, $z'$ и воспользуемся функцией Лагранжа из примера 21.6, имеющей вид:

$$L' = \frac{mv'^2}{2} + \frac{m}{2}[\vec{\omega}\vec{r}']^2 - m\vec{r}'\vec{a}_0 - U(\vec{r}') + m\vec{v}'[\vec{\omega}\vec{r}'].$$

Здесь при движении неинерциальной системы величины $\vec{\omega}$ и $\vec{a}_0$ являются явными функциями времени, поэтому интеграла обобщенной энергии нет. Все три координаты обязательно входят в лагранжиан, если система вращается (члены второй и последний), поэтому нет и циклических интегралов момента импульса. Если бы система не вращалась, циклические интегралы импульса существовали бы при отсутствии третьего слагаемого, но тогда система была бы инерциальной.

Из формулы для лагранжиана видно, что если система отсчета движется с постоянным ускорением и вращается с постоянной скоростью, то существует только интеграл обобщенной энергии:

$$H = \frac{mv'^2}{2} + U(\vec{r}') - \frac{m}{2}[\vec{\omega}\vec{r}']^2 + m\vec{r}'\vec{a}_0.$$

Этот вывод получается сразу, если учесть, что выбранные координаты нормальные

(т. е. кинетическая энергия есть $\frac{mv'^2}{2}$), а обобщенный потенциал $U_1$ выражен последним слагаемым. Дополнительные к механической энергии слагаемые — третье и четвертое — играют роль потенциальной энергии в поле сил инерции.

Пример 22.6. **Ларморова прецессия.**

Рассмотрим движение заряженной материальной точки в поле притяжения центральной силы при условии, что имеется слабое однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ (например, электрон движется в поле кулоновского притяжения к ядру, а атом находится в магнитном поле). Функцию Гамильтона в цилиндрических координатах для этого случая можно записать, пользуясь примером 22.3:

$$H = \frac{mv^2}{2} + U(r) + \frac{eB}{2}\rho^2\dot{\varphi}.$$

Рассмотрим теперь движение в неинерциальной системе, вращающейся вокруг оси $Oz$ с угловой скоростью $\dot{\varphi} = \omega$, без магнитного поля.

Чтобы записать функцию Гамильтона в этой системе, разложим выражение кинетической энергии в инерциальной системе на кинетическую энергию относительного движения и энергию вращательного движения:

$$\frac{mv^2}{2} \approx \frac{mv'^2}{2} + \frac{m}{2}\rho^2\omega^2.$$

Функция Гамильтона во вращающейся системе найдена в примере 22.5:

$$H' = \frac{mv^2}{2} - \frac{m}{2}\rho^2\omega^2 + U(r) - \frac{m}{2}\rho^2\omega^2.$$

Теперь можно свести действие магнитного поля на электрон к движению неинерциальной системы. Приравнивая $H$ и $H'$, видим, что

$$\omega = \frac{|e|B}{2m}.$$

Таким образом, в магнитном поле электрон движется так же, как в неинерциальной системе, вращающейся вокруг направления поля с угловой скоростью $\omega$, что равносильно прецессии орбиты электрона вокруг направления поля с ларморовой частотой $\omega$.

**22.3*. Законы сохранения и симметрии пространства-времени.** Существует определенная связь между законами сохранения энергии, импульса, момента импульса и симметриями пространства-времени: однородностью, изотропностью. В механике эта связь наиболее полно может быть выяснена с помощью уравнений Лагранжа.

Однородность времени и сохранение энергии

Возьмем замкнутую свободную систему материальных точек, для которой в силу однородности времени функция Лагранжа явно от времени не зависит, т. е.

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

Но это и есть, как было показано ранее (в § 22), условие сохранения обобщенной энергии $H$ для системы. Для потенциальных и обобщенно-потенциальных сил (а такие силы только и могут иметь место для свободной системы материальных точек в пустоте) обобщенная энергия совпадает с полной механической энергией. Таким образом, закон сохранения полной механической энергии замкнутой свободной

системы оказывается следствием уравнений Лагранжа и однородности времени.

Однородность пространства и сохранение импульса

Произведем сдвиг системы в пространстве как единого целого, т. е. выполним трансляцию или параллельный перенос на $\delta\vec{r}$. Все точки испытывают смещение на один и тот же бесконечно малый отрезок, так что

$$\vec{r_i} \to \vec{r_i'} = \vec{r_i} + \delta\vec{r}. \qquad (22.11)$$

Мы рассматриваем свободную от связей систему, поэтому в качестве обобщенных координат выбираем декартовы координаты точек. Все точки системы испытывают один и тот же сдвиг: $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$.

Найдем соответствующее этому сдвигу бесконечно малое изменение функции Лагранжа системы. Это можно сделать, варьируя лагранжиан по координатам:

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i}\delta x + \sum_i \frac{\partial L}{\partial y_i}\delta y + \sum_i \frac{\partial L}{\partial z_i}\delta z.$$

В силу однородности пространства параллельный перенос замкнутой системы в нем не приводит к каким-либо физическим изменениям в системе. Это значит, что лагранжиан системы при переносе не изменяется, т. е. $\delta L = 0$. Отсюда следуют равенства:

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0,\ \sum_i \frac{\partial L}{\partial y_i} = 0,\ \sum_i \frac{\partial L}{\partial z_i} = 0.$$

Суммируя по всем точкам системы уравнения (22.8), выражающие закон изменения обобщенного импульса, с помощью последних равенств приходим к новым равенствам:

$$\frac{d}{dt}\sum_i p_{ix} = 0,\ \frac{d}{dt}\sum_i p_{iy} = 0,\ \frac{d}{dt}\sum_i p_{iz} = 0.$$

Отсюда и следует закон сохранения обобщенного импульса замкнутой системы:

$$\sum_i p_{ix} = \text{const},\ \sum_i p_{iy} = 0,\ \sum_i p_{iz} = \text{const}.$$

Для потенциальных сил обобщенные импульсы свободной системы в декартовых координатах совпадают с обычными импульсами $m_i\vec{v_i}$, в чем нетрудно убедиться, используя определение обобщенного импульса (22.7) и функцию Лагранжа:

$$L = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} - \frac{1}{2}\sum_{i \neq k} U_{ik}(r_{ik}).$$

Из (22.7) следует, что $\vec{p_i} = m_i\vec{v_i}$.

Если в замкнутой системе действуют обобщенно-потенциальные силы, то обобщенный потенциал для каждой пары точек может зависеть только от модуля их относительной скорости, т. е. $U = U(v_{1,2})$.

В этом случае дополнительные слагаемые к обычному импульсу (см. формулу (22.10) ) системы двух точек в обобщенном импульсе дадут нуль, так как $|\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = v_{1,2}$ и

$$\frac{\partial U(v_{1,2})}{\partial \vec{v}_1} = -\frac{\partial U(v_{1,2})}{\partial \vec{v}_2}.$$

В конечном счете обобщенный импульс свободной системы оказывается обычным и для замкнутой системы всегда сохраняется.

Изотропность пространства и сохранение момента импульса

Произведем поворот замкнутой свободной системы материальных точек в пространстве вокруг некоторой оси $OO'$ на бесконечно малый угол $\delta\vec{\varphi}$. Как видно из рисунка 2.6, смещение точек определяется вектором $\delta\vec{r} = [\delta\vec{\varphi}\vec{r}]$. Аналогично изменяются и векторы скоростей, т. е. $\delta\vec{v} = [\delta\vec{\varphi}\vec{v}]$. Итак, при повороте системы происходят преобразования координат и скорости:

$$\vec{r} \to \vec{r}' = \vec{r} + [\delta\vec{\varphi}\vec{r}],\ \vec{v} \to \vec{v}' = \vec{v} + [\delta\vec{\varphi}\vec{v}].$$

Найдем изменение функции Лагранжа, обусловленное поворотом (в качестве обобщенных координат взяты декартовы координаты точек):

$$\delta L = \sum_i (\mathrm{grad}_{\vec{r}_i} L\delta\vec{r}_i + \mathrm{grad}_{\vec{v}_i} L\delta\vec{v}_i).$$

$\left(\text{Здесь } \mathrm{grad}_{\vec{v}_i} L = \vec{i}\frac{\partial L}{\partial v_{ix}} + \vec{j}\frac{\partial L}{\partial v_{iy}} + \vec{k}\frac{\partial L}{\partial v_{iz}}.\right)$

Найденное изменение в силу изотропности пространства равно нулю. Учитывая значения $\delta\vec{r}_i$ и $\delta\vec{v}_i$, имеем:

$$\sum_i \mathrm{grad}_{\vec{r}_i} L[\delta\vec{\varphi}\vec{r}_i] + \sum_i \mathrm{grad}_{\vec{v}_i} L[\delta\vec{\varphi}\vec{v}_i] = 0.$$

Произведя циклическую перестановку сомножителей в смешанных произведениях, получим:

$$\delta\vec{\varphi}\sum_i \{[\vec{r}_i\,\mathrm{grad}_{\vec{r}_i} L] + [\vec{v}_i\,\mathrm{grad}_{\vec{v}_i} L]\} = 0.$$

Но на основании (22.8)

$$\mathrm{grad}_{\vec{v}_i} L = \vec{p}_i,$$

а с помощью уравнений Лагранжа

$$\mathrm{grad}_{\vec{r}_i} L = \frac{d}{dt}\vec{p}_i.$$

Так что

$$\delta\vec{\varphi}\sum_i \{[\vec{r}_i\dot{\vec{p}}_i] + [\vec{v}_i\vec{p}_i]\} = \delta\vec{\varphi}\sum_i \frac{d}{dt}[\vec{r}_i\vec{p}_i] = 0.$$

Откуда и следует:

$$\sum_i [\vec{r}_i \vec{p}_i] = \text{const}.$$

Величина

$$\vec{M} = \sum_i [\vec{r}_i \vec{p}_i]$$

является моментом импульса системы. Она сохраняется с течением времени для замкнутой системы. Итак, показано, что в рамках уравнений Лагранжа законы сохранения вытекают как следствия из этих уравнений и свойств пространства и времени, называемых симметриями пространства-времени.

### § 23. Канонические уравнения Гамильтона

В предыдущем параграфе рассмотрены уравнения движения системы; чтобы их составить для конкретной задачи, необходимо знать функцию Лагранжа $L$. Метод получения и анализа уравнений движения, основанный на функции Лагранжа, охватывает не только механические системы, но и квантово-механические системы и электромагнитное поле. Такой метод носит название *формализма Лагранжа*.

Кроме этого метода, существует и другой метод составления дифференциальных уравнений движения для механических и других систем, основанный на функции Гамильтона (22.2), или обобщенной энергии. Этот метод называют *гамильтоновым формализмом*.

**23.1. Вывод уравнений Гамильтона из уравнений Лагранжа.** Каждое уравнение Лагранжа есть дифференциальное уравнение второго порядка, а число уравнений равно $s$ — числу степеней свободы механической системы. Считается, что система дифференциальных уравнений имеет нормальный вид, если все уравнения, входящие в нее, первого порядка. Заданную систему дифференциальных уравнений второго порядка можно привести к нормальному виду множеством способов.

Ирландский математик Гамильтон указал способ приведения дифференциальных уравнений Лагранжа к нормальному виду, дающий симметричные, т. е. одинаковые по форме уравнения относительно разных переменных, входящих в них. Эти дифференциальные уравнения получили название *канонических дифференциальных уравнений* движения. Они называются также *уравнениями Гамильтона*.

Рассмотрим один из способов получения канонических уравнений, причем выведем их для системы с голономными идеальными связями и обобщенно-потенциальными силами.

Перейдем от совокупности обобщенных координат $q_1, q_2, ..., q_s$ независимых переменных, задающих положение всех точек системы, к новой совокупности независимых переменных, в которой к $s$ координатам $q_k$ прибавлено $s$ обобщенных импульсов: $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$. Совокуп-

ность 2$s$ каноинческнх переменных — обобщенных координат $q_k$ и обобщенных импульсов $p_k$ — в любой момент времени однозначно определяет механическое состояние системы материальных точек.

Если в методе Лагранжа для составлення дифференциальных уравнений движення должна быть известна функция Лагранжа, то теперь исходной служит функция Гамильтона:

$$H = \sum_k p_k\dot{q}_k - L(q_k, \dot{q}_k, t), \tag{23.1}$$

*которая должна быть выражена через канонические переменные.* Последнее всегда возможно, так как $\dot{q}_k$ является однозначной функцией $p_k$ и $q_k$.

Обобщенный импульс в общем случае будет выражаться формулой

$$p_j = \sum_k A_{kj}\dot{q}_k + A_j - a_j.$$

Эта система разрешима относительно $\dot{q}_k$, так как определитель

$$|A_{kj}| \neq 0.$$

Итак, пусть $H = H(p_k, q_k)$.

Запишем теперь функцию Лагранжа системы с помощью формулы (23.1) через функцию Гамильтона, которую считаем заданной:

$$L(q_k, \dot{q}_k, t) = \sum_k p_k\dot{q}_k - H(p_k, q_k, t). \tag{23.2}$$

Используя (23.2) для составлення уравнений Лагранжа (21.2), получим одно уравнение Гамильтона, а дифференцируя равенство (23.2) по $p_k$ частным образом,— другое уравнение Гамильтона:

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k};$$
$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, s). \tag{23.3}$$

Эти уравнения описывают движение системы под действием потенциальных и обобщенно-потенциальных сил. Если есть диссипативные силы, то первое уравнение видоизменяется; в соответствии с формулой (21.7) справа прибавляется обобщенная сила:

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} + Q_k. \tag{23.4}$$

Из системы уравнений (23.3) видно, что уравнения Гамильтона имеют симметричный вид относительно канонических переменных $p_k$ и $q_k$, благодаря чему они находят широкое применение в теории, в частности в статистической физике. Вспомним, что в лагранжевом формализме состояние системы из $n$ материальных точек описывают положением одной изображающей точки в пространстве конфигураций, образованном обобщенными координатами $q_k$ (§ 19). Аналогично в гамильтоновом формализме состояние системы описывают положением изображающей точки в *фазовом* пространстве, образованном обобщенными координатами $q_k$ и обобщенными импульсами $p_k$. Конфигурационное пространство имеет $s$, а фазовое 2$s$ измерений.

Пример 23.1. **Составление уравнений Гамильтона.**

Найдем общий вид уравнений Гамильтона для свободной материальной точки массой $m$, движущейся в потенциальном поле. Гамильтониан в декартовых координатах имеет вид:

$$H = T_2 + U_0 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U_0 (x, y, z, t).$$

Обобщенные импульсы выражаются формулами

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \; p_y = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \; p_z = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z},$$

следовательно, гамильтониан запишется через обобщенные импульсы так:

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \right) + U_0 (x, y, z, t).$$

Уравнения Гамильтона нетрудно получить с помощью формул (23.3):

$$\begin{cases} \dot{p}_x = -\dfrac{\partial U}{\partial x}, \; \dot{p}_y = -\dfrac{\partial U}{\partial y}, \; \dot{p}_z = \dfrac{\partial U}{\partial z}, \\ \dot{x} = \dfrac{p_x}{m}, \; \dot{y} = \dfrac{p_y}{m}, \; \dot{z} = \dfrac{p_z}{m}. \end{cases}$$

Пример 23.2. **Функция Гамильтона для заряженной материальной точки в электромагнитном поле в обобщенных импульсах.**

Обобщенный импульс для заряженной точки рассчитан в примере 22.3 и выражается формулой

$$\vec{p}_{об} = m\vec{v} + q\vec{A},$$

а обобщенная энергия (см. пример 22.1) — формулой

$$H = \frac{mv^2}{2} + q\varphi.$$

Гамильтониан следует выразить через обобщенный импульс:

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p}_{об} - q\vec{A})^2 + q\varphi.$$

Функция Гамильтона составлена.

Пример 23.3. **Составление уравнений движения заряженной точки в электромагнитном поле.**

Уравнения Гамильтона (23.3) составим для найденной в предыдущем примере функции $H$:

$$m\dot{v}_x + q\dot{A}_x = \frac{1}{m} (\vec{p}_{об} - q\vec{A}) \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} - q \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$m\dot{v}_y + q\dot{A}_y = \frac{1}{m} (\vec{p}_{об} - q\vec{A}) \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} - q \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$m\dot{v}_z + q\dot{A}_z = \frac{1}{m} (\vec{p}_{об} - q\vec{A}) \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} - q \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$\dot{\vec{r}} = \frac{1}{m} (\vec{p}_{об} - q\vec{A}).$$

**23.2. Интегралы уравнений Гамильтона.** Из уравнений Гамильтона можно получить интегралы, аналогичные вытекающим из уравнений Лагранжа (§ 22), т. е. интеграл обобщенной, или *полной механической энергии*, и циклические интегралы обобщенных импульсов. Так как частные производные по времени от функции Лагранжа и Гамильтона совпадают, как это видно из формулы (23.2), то условием сохранения обобщенной энергии является независимость

$H$ от временн *явно*. Формула $H = \text{const}$ выражает первый интеграл двнжеиия или интеграл эиергии.

Из формулы (23.2) видио, что совпадают и частые производные по коорднатам от обеих фуикций:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{\partial H}{\partial q_k}.$$

А это зиачит, что уравиення Лаграижа и Гамильтона нмеют общие циклическне интегралы.

При наличии циклических коордииат нмеют место отдельные равенства

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0$$

и соответствеиио циклнческие нитегралы $\dot{p}_k = 0$, $p_k = \text{const}$, являющиеся ннтегралами обобщеиных нмпульсов.

Может случнться, что все координаты циклическне. Тогда все обобщеиные импульсы постояииы; постояиен во времеии и гамнльтоинаи. Отсюда

$$\dot{q}_k = \text{const},$$

а кинематические уравиеиия двнжения нмеют вид: $q_k = C_1 t + C_2$. Задача о двнжеиии решается прн иитегрнровании половииы уравнений от всех уравиеиий движеиия.

Пример 23.4. **Движеиие материальиой точки под действием силы тяжести.** Составим гамильтоииаи:

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + mgz.$$

Видим, что коордииаты $x$ и $y$ являются циклическими. Следовательио,

$$\dot{x} = \text{const},\ \dot{y} = \text{const},\ \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -mg.$$

Общее решеиие задачи получается сразу:

$$x = C_1 t + C_2,\ y = C_3 t + C_4,\ z = -\frac{gt^2}{2} + C_5 t + C_6.$$

Эта задача решеиа с помощью ньютоиовых дифферeициальиых уравиеиий в § 6. Сейчас можио видеть, что в гамильтоиовом формализме ие потребовалось ни поиятия силы, ни проецироваиия векториых уравиеиий иа оси.

**23.3*. Скобки Пуассона.** Пусть движеиие системы описывается уравиениями Гамнльтона:

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k},\ \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k},$$

а $f(p_k, q_k, t)$ есть одна из функций механического состояиия системы, иапример эиергия, импульс и т. д.

Возьмем полную производиую по времеии от этой фуикцнн:

$$\frac{df}{dt} = \sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\dot{p}_k + \frac{\partial f}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Преобразуем $\frac{df}{dt}$, пользуясь уравнениями Гамильтона:

$$\frac{df}{dt} = \sum_{k=1}^{s} \left( \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Сумма в предыдущей формуле обозначается через $[f, H]$:

$$[f, H] = \sum_{k=1}^{s} \left( \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right). \tag{23.5}$$

Она является дифференциальным оператором, который называется *скобками Пуассона*. В новых обозначениях для полной производной функции $f$ имеем формулу

$$\frac{df}{dt} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{23.6}$$

Если $\frac{df}{dt} = 0$, функция $f(p_k, q_k, t)$ является интегралом движения. В таком случае

$$[f, H] = -\frac{\partial f}{\partial t}. \tag{23.7}$$

Если же интеграл не зависит от времени явно, то скобка Пуассона равна нулю:

$$[f, H] = 0. \tag{23.8}$$

Скобки Пуассона можно составить и для двух функций состояния $f_1$ и $f_2$, т. е.

$$[f_1, f_2] = \sum_{k=1}^{s} \left( \frac{\partial f_1}{\partial q_k} \frac{\partial f_2}{\partial p_k} - \frac{\partial f_1}{\partial p_k} \frac{\partial f_2}{\partial q_k} \right). \tag{23.9}$$

Из последней формулы видно, что скобки Пуассона антикоммутативны: $[f_1, f_2] = -[f_2, f_1]$.

И только для одинаковых функций коммутативны: $[f_1, f_2] = 0$; говорят, что скобки Пуассона обладают свойством антисимметрии.

Скобки Пуассона, взятые для самих канонических переменных (т. е. $f_1 = q_k$, $f_2 = p_k$), называются *фундаментальными* скобками Пуассона. Они таковы:

$$\begin{cases} [q_k, q_j] = 0, \quad [p_k, p_j] = 0, \\ [q_k, p_j] = \delta_{kj}, \ \delta_{kj} = \begin{cases} 0, & k \neq j, \\ 1, & k = j. \end{cases} \end{cases} \tag{23.10}$$

С помощью скобок Пуассона описываются инвариантные свойства системы, т. е. не зависящие от выбора канонических переменных.

Фундаментальные скобки Пуассона имеют квантово-механический аналог — перестановочные соотношения Гейзенберга, играющие важную роль в квантовой механике. В аппарате этой науки формализм Гамильтона играет существенную роль.

## § 24. Принцип экстремального действия

**24.1. Действие. Принцип Гамильтона.** Уравнения Лагранжа были получены ранее из уравнений Ньютона для системы связанных материальных точек с помощью принципа виртуальных перемещений и принципа Даламбера — Лагранжа. Однако уравнения Лагранжа можно получить из общего теоретического принципа, носящего название вариационного принципа *экстремального* (иногда *стационарного) действия.* (Он же называется принципом Остроградского — Гамильтона.) Принцип экстремального действия распространяется не только на механические, но и на квантово-механические системы, поля, поэтому он имеет важнейшее теоретическое значение.

Принцип экстремального действия может быть применен к сложным механическим системам со связями. Однако уравнения для таких систем уже получены из общего уравнения механики. Особенно важно, что принцип экстремального действия применим для свободных систем в фундаментальных силовых полях, а также для самих полей как *систем с бесконечным числом степеней свободы.* По этой причине принцип позволяет получать фундаментальные уравнения физики как в механике, так и за ее пределами.

Мы применим принцип экстремального действия для нахождения уравнений движения свободной точки в потенциальном и обобщенно-потенциальном поле.

Если поведение системы описывается обобщенными координатами $q_k$ (и некоторыми параметрами, такими, как масса, заряд) и известна функция Лагранжа $L = L(q_k, \dot{q}_k, t)$, то можно составить *интеграл действия:*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_k, \dot{q}_k, t)\,dt. \qquad (24.1)$$

Эта величина имеет размерность «энергия·время».

Заметим, что в предыдущих параграфах описывалось нахождение функции Лагранжа в процессе перехода от декартовых координат к обобщенным с помощью уравнений связи, понятий обобщенной силы, кинетической энергии и потенциальной. Сейчас предполагаем, что функция Лагранжа *задана.*

Для определения состояния системы с $s$ степенями свободы выбрано $s$ обобщенных координат. Введя конфигурационное пространство $s$ измерений, можно рассматривать обобщенные координаты $q_k$ как координаты точки $s$-мерного пространства. При движении система заменяется одной изображающей точкой, движущейся в конфигурационном пространстве. Эта точка в пространстве конфигураций описывает кривую, которую условно можно назвать траекторией движения системы.

Пусть имеем два состояния системы: в момент времени $t_1$ состояние системы определяется точкой $A$ пространства конфигураций, а в момент $t_2$ — точкой $B$ (рис. 24.1). Принцип стационарного действия состоит в утверждении: *из всех движений, переводящих систему из состояния $A$ в момент времени $t_1$ в состояние $B$*

*в момент времени $t_2$, в действительности осуществляется то, для которого обращается в нуль вариация интеграла действия:*

$$\delta S = \delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = 0. \tag{24.2}$$

Обращение в нуль вариации действия есть необходимое условие его экстремума. Этим обстоятельством и объясняется название принципа.

**24.2. Вывод уравнений Лагранжа из принципа экстремального действия.** В математике интеграл (24.1) принадлежит к так называемым *функционалам*, если рассматривается зависимость его величины от вида подынтегральной функции. Задача об экстремуме функционала — отыскание функции, при которой наступает экстремум,— решается методами вариационного исчисления. В результате решения находятся дифференциальные уравнения, выполняющиеся для подынтегральной функции $L$; а поскольку в нашей постановке вопроса лагранжиан есть известная функция переменных $q$, $\dot{q}$ и $t$, то получаются дифференциальные уравнения для обобщенных координат, т. е. *уравнения движения.*

Рассмотрим сначала одномерную задачу и найдем условия экстремума действия:

$$\delta S = \delta\int_{t_1}^{t_2} L(q,\ \dot{q},\ t)dt = 0.$$

Проварьируем интеграл:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q,\ \dot{q} + \delta\dot{q},\ t)\,dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)\,dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \{L(q + \delta q,\ \dot{q} + \delta\dot{q},\ t) - L(q,\ \dot{q},\ t)\}dt.$$

Осталось найти вариацию подынтегральной функции $L$. Этот вопрос рассматривался в § 19, откуда с помощью формулы (19.2) имеем: $\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\right)dt = 0.$

Изменяя последовательность дифференцирования и варьирования (что можно делать, так как время не варьируется), получаем: $\delta\dot{q} = \frac{d}{dt}\delta q$. Подставим это значение в предыдущую формулу:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial q}\,\delta q dt + \int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}\,\delta q dt;$$

здесь второй интеграл берется по частям:

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}\,\delta q dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\delta q\,\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\delta q dt.$$

Первое слагаемое результата обращается в нуль, так как по определению отыскивается такая функция $q = q(t)$, которая проходит через точки (*1*) и (*2*) на рисунке 24.2, т. е. $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$. Итак,

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q dt = 0. \tag{24.3}$$

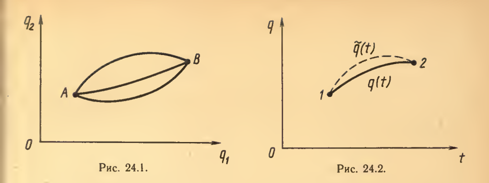



Рис. 24.1. Рис. 24.2.

Равенство должно выполняться при произвольных (отличных от нуля) значениях $\delta q$, и поэтому имеет место необходимое и достаточное условие экстремума действия в виде уравнения, выполняющегося для подынтегральной функции $L$ в интеграле действия:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \tag{24.4}$$

Но это и есть уравнение Лагранжа для потенциальных и обобщенно-потенциальных сил.

Если функция Лагранжа зависит от $s$ обобщенных координат $q_k$ и скоростей $\dot{q}_k$, то при варьировании функции $L$ получим $s$ соответствующих слагаемых по формуле (24.3), отличающихся индексом $k$. В силу независимости вариаций $\delta q_k$ получится *система уравнений Лагранжа:*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \; k = 1, 2, 3, \ldots, s. \tag{24.5}$$

Особенность принципа экстремального действия состоит в простой связи его с преобразованиями от одной системы отсчета к другой. Об инвариантности уравнений Лагранжа по отношению к преобразованиям координат уже говорилось в § 21. Сейчас рассмотрим вопрос с иной точки зрения. Если действие является *инвариантом* некоторых преобразований, то получаемые из соответствующей функции $L$ уравнения движения (24.5) будут *инвариантны* по отношению к этим преобразованиям. По этой причине составление лагранжианов широко применяется для получения инвариантных уравнений.

Пример 24.1. **Составление инвариантного по отношению к преобразованиям Галилея интеграла действия для изолированной материальной точки.**

Так как точка характеризуется в данном случае единственным параметром — массой, то этот скаляр должен входить в лагранжиан. Механическое состояние точки описывается ее координатами $x$, $y$, $z$ и скоростями $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$. Но координаты в силу однородности пространства не могут входить в лагранжиан изолированной точки; скорость же благодаря изотропности пространства может войти через скаляр, т. е. в виде $(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$.

При преобразованиях Галилея (см. § 3) скорость преобразуется по формуле

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0,$$

откуда

$$v'^2 = v^2 + v_0^2 - 2\vec{v}\,\vec{v}_0.$$

Функции Лагранжа $L$ и $L'$ отличаются слагаемым вида

$$\vec{v}\,\vec{v}_0 = \frac{d}{dt}\vec{r}\,\vec{v}_0,$$

несущественным для уравнений Лагранжа (см. § 21). Если же модуль скорости включить в лагранжиан в степени выше второй, то лишние слагаемые, возникающие при возведении в куб и т. д., к полной производной по времени не сводятся и такие лагранжианы неинвариантны.

Не может зависеть лагранжиан и от времени, так как точка изолирована, а время однородно. Итак,

$$L \sim m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Коэффициент пропорциональности выберем $\frac{1}{2}$, т. е.

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Интеграл (24.1) с данной функцией Лагранжа будет инвариантом, так как время — инвариант преобразований Галилея.

Пример 24.2. **Составление инвариантной функции Лагранжа для свободной точки в силовом поле.**

В данном случае точки поля не обладают свойством однородности, как и моменты времени при переменном поле, т. е. в лагранжиан может входить функция координат и времени. Принцип относительности требует инвариантности лагранжиана, т. е. координаты должны входить в него через расстояния от центра (или расстояния до других точек):

$$U = U(r)$$

или

$$U = \sum_i U_i |\vec{r}_i - \vec{r}| = U(\vec{r}, t).$$

Функция Лагранжа имеет вид:

$$L = \frac{1}{2} mv^2 - U(\vec{r}, t).$$

Она приводит к известным уравнениям Ньютона, рассмотренным выше.

Пример 24.3. **Функция Лагранжа для обобщенно-потенциальных сил.**

По рассмотренной выше причине скорость в обобщенный потенциал может входить только линейно (в квадрате скорость входит в кинетическую энергию). Поэтому

$$L = \frac{1}{2} mv^2 - U(\vec{r}, t) + \vec{A}(\vec{r}, t)\,\vec{v},$$

где $\vec{A}(\vec{r}, t)$ — векторный потенциал поля. Функция такого вида использовалась в примере 21.5.

**24.3. Различные схемы построения классической механики.** При построении курса механики в основу были положены законы Ньютона, являющиеся результатом широкого обобщения опытных фактов. Законы Ньютона с логической стороны являются *аксиомами,* из которых выводится все содержание механики. Построение механики, однако, возможно и при других исходных *положениях и принципах.* Такие принципы могут различаться по своей общности и по математической форме, хотя и связаны между собой.

Они приводят к различным схемам построения механики, каждая из которых содержит некоторую новую точку зрения на описание механического движения. Это обстоятельство имеет большую эвристическую ценность: особенности механического движения, оставшиеся скрытыми при одних исходных принципах, выступают явно

при использованнн другнх. Существенным оказывается и прнвлечение разлнчных математнческих методов для решения сложных задач механикн.

По своей математической форме принципы выражаются *дифференциальными* илн *интегральными* соотношениямн. Днфференциальными называют такие законы, формулы которых связывают значения величин, относящихся к одному и тому же моменту времени или к одной и той же точке пространства. А формулы интегральных законов устанавлнвают связь между величинами, относящимися к конечному промежутку временн или конечной области пространства. Например, второй закон Ньютона есть дифференциальный закон, а уравненне, выражающее теорему об измененни кинетнческой энергии материальной точки, является интегральным законом.

Прннципы механики подразделяются еще на *невариационные* и *вариационные*. Невариационные законы устанавливают соотношенне между велнчннами, имеющнми место для действительного движения. Вариацнонные устанавливают признаки, отличающне действительное двнжение от всех других движений, кннематически возможных. Примером вариационных дифференциальных принципов служнт прннцнп возможных перемещеннй н общее уравнение механикн. Известен ряд вариацнонных интегральных принцнпов, обладающих различной общностью. Наиболее общим является принцнп, установленный Гамнльтоном и обобщенный Остроградскнм, нли принцип экстремального действия.

Заканчивая изученне основ аналнтнческой механнки, остановимся на двух схемах построення классической механики, применявшихся выше. Первая нз них основывается на законах Ньютона, из которых следует все содержание положеннй и выводов механики. Отличнтельной чертой в этой схеме является подход к снле как причине нзменення механнческого состояния. Такой подход в известной мере нагляден.

Вторая схема нмеет в своей основе интегральный варнацнонный принцип Остроградского — Гамнльтона. Она в физическом плане является более формальной, но зато и более общей, ибо распространяется за пределы классической механнки. Исходнымн понятиямн здесь являются действие, функцня Лагранжа; они весьма абстрактны.

Принцип экстремального действня охватывает и немеханические явления, находя прнменение в электродннамике и теории относительности, термодинамнке и статистической фнзике, квантовой механике и других разделах теоретической физикн. Такое шнрокое применение прннцнпа тесно связано с методом обобщенных координат. Уравнення Лагранжа не ограничены реальным евклндовым пространством. Только для свободной точки они представляют уравнения движення в координатах трехмерного пространства. В случае системы со связямн автоматическнй учет действия снл реакцнй связей осуществляется уже самим выбором обобщенных координат, а чнсло их определяет мерность пространства конфнгурацнй. Переход к бесконечномерному пространству конфнгураций позволяет применнть

принцип экстремального действия к системам с бесконечным числом степеней свободы — физическим полям.

Полезно подчеркнуть, что если механика основывается на аксиомах Ньютона, то при теоретическом нахождении кинематических уравнений движения должны быть *заданы силы*. Если же речь идет о второй схеме, лагранжевом или гамильтоновом формализме, то должны быть заданы *функция Лагранжа* или *Гамильтона*. Конкретные формулы как для сил, так и для названных функций в рамках механики не выводятся, а задаются.

## ГЛАВА VII. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В § 12 мы выяснили, что благодаря закону сохранения полной механической энергии движение материальной точки может быть ограничено некоторой областью пространства. Это утверждение справедливо и для системы материальных точек. Метод обобщенных координат, изложенный в предыдущей главе, позволяет сократить число независимых параметров, определяющих движение несвободной системы материальных точек. Число независимых параметров — обобщенных координат — равно числу степеней свободы системы; движение системы рассматривается как движение изображающей ее точки в пространстве конфигураций. Многие системы описываются только одной координатой, так как обладают всего одной степенью свободы. Для таких систем характерно колебательное движение.

### § 25. Одномерный гармонический осциллятор

**25.1. Одномерное движение.** *Одномерным называют движение системы с одной степенью свободы.* Рассмотрим систему точек со стационарными потенциальными силами и стационарными идеальными связями. Для нее выполняется закон сохранения полной механической энергии:

$$E = T(q, \dot{q}) + U(q) = \text{const},$$

поэтому проводится качественное исследование одномерного движения по графикам потенциальной и полной энергий. Пусть потенциальная энергия имеет вид кривой, изображенной на рисунке 25.1. Кривая имеет одну впадину — *потенциальную яму* на отрезке $AB$ и горб — *потенциальный барьер* на отрезке $BC$, а правее $C$ нигде более не пересекает график полной механической энергии — прямую $AC$.

Кинетическая энергия всегда положительная величина, поэтому должно выполняться условие

$$E - U(q) \geqslant 0.$$

Точки $A$, $B$, $C$ называются *точками остановки* или *поворотными точками*, так как в этих точках потенциальная энергия равна полной механической энергии, а кинетическая — нулю.

Рассмотрим движения, соответствующие двум участкам графика:

$$q_1 \leqslant q \leqslant q_2 \text{ и } q > q_3.$$

В потенциальной яме $q_1 \leqslant q \leqslant q_2$, движение является ограниченным с двух сторон, так как точка не может выйти за пределы интервала от $q_1$ до $q_2$. Это движение называется *финитным*.

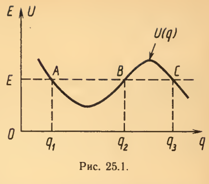



Рис. 25.1.

Движение правее точки $C$ ограничено только с одной стороны наименьшей координатой $q_3$. Координата изменяется от $q_3$ до $\infty$. Если область движения не ограничена или ограничена лишь с одной стороны, то движение называется *инфинитным*. (Понятие финитного и инфинитного движения рассматривалось ранее для свободной точки в § 12. Теперь понятие расширено на систему точек со связями.)

*Одномерное финитное движение является колебательным.* Запишем для него функцию Лагранжа по формуле (21.1). Для рассматриваемой системы со стационарными связями кинетическая энергия имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} A\dot{q}^2,$$

как это показано в примере 20.8. Коэффициент инерции $A$ — величина постоянная; ею может быть, например, масса точки, момент инерции, приведенная масса системы двух точек. Итак, лагранжиан системы имеет вид:

$$L = \frac{1}{2} A\dot{q}^2 - U(q).$$

Соответствующие дифференциальные уравнения рассмотрены в следующем параграфе.

Как уже говорилось, одномерность движения системы нескольких материальных точек обеспечивается связями. В качестве примера можно привести системы связанных тел, рассмотренных ранее в § 7, математический и физический маятники, вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Но одномерным может быть и движение свободной материальной точки. Таково, например, прямолинейное движение. Иногда и криволинейное движение свободной точки удается свести к одномерному, написав одномерный эффективный потенциал (§ 27).

**25.2. Дифференциальное уравнение малых свободных колебаний системы с одной степенью свободы.** Пусть имеется система с одной степенью свободы. Исследуем движение системы около положения устойчивого равновесия.

Обозначим через $q$ единственную обобщенную координату системы. Положение равновесия системы определяется из уравнения

$$Q(q) = 0,$$

где $Q$ — обобщеииая сила. Рассмотрим только потеициальиые силы. Тогда условие равиовесия сводится к требоваиию

$$Q = -\frac{\partial U}{\partial q} = 0.$$

Как говорилось раиее, в положеиии равиовесия потеициальиая эиергия системы имеет экстремальиое зиачеиие. Положеиию устойчивого равиовесия соответствует ее мииимальиое зиачеиие, при котором малое отклоиеиие вызывает появлеиие силы, возвращающей систему в прежиее состояиие (восстаиавливающая сила). Таким образом, в положеиии устойчивого равиовесия

$$\frac{d^2U}{dq^2} > 0.$$

Пусть $q_0$ — соответствующая координата. Обозиачим через $x$ отклоиеиие системы от положеиия равиовесия. Тогда

$$U(q) = U(q_0 + x).$$

По условию $x$ должио быть малой величииой. Разложив потеициальиую эиергию в ряд по степеиям малой величииы $x$, получаем:

$$U(q_0 + x) = U(q_0) + \left(\frac{dU}{dq}\right)_0 x + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2U}{dq^2}\right)_0 x^2 + \ldots$$

Примем потеициальную эиергию в положеиии равиовесия равиой иулю: $U(q_0) = 0$. (Это иормировка потенциальиой эиергии.) Коэффициеит $\left(\frac{dU}{dq}\right)_0$ при первой степеии смещеиия обращается в иуль вследствие необходимого условия равиовесия, а коэффициеит при квадрате смещеиия должеи быть больше иуля (условие минимума $U$), т. е.

$$\left(\frac{d^2U}{dq^2}\right)_0 = k > 0.$$

Преиебрегая члеиами с высшими степеиями малой величииы $x$, получаем следующее приближеииое выражеиие для потеициальиой эиергии системы в окрестиости точки устойчивого равиовесия:

$$U = \frac{kx^2}{2}.$$

Обобщеииая же сила имеет вид[1]:

$$Q = -\frac{\partial U}{\partial q} = -\frac{\partial U}{\partial x} = -kx.$$

Итак, если отклоиеиия системы от положеиия равиовесия до-

[1] Для функцнн одной переменной $q$ разлнчня между обозначеннямн $\frac{d}{dq}$ и $\frac{\partial}{\partial q}$ нет.

статочно малы, восстаиавливающая сила имеет характер *квазиупругой силы*.

Кииетическая эиергия системы для данного простейшего случая определяется формулой $T = A(q)\dot{q}^2$.

Коэффициент инерции $A(q)$ должен быть либо постояиным, либо медлеиио изменяющейся функцией коордииаты $q$. Учитывая малые измеиеиия координаты $q$ при движеиии системы около положеиия равиовесия, коэффициент иерции можно считать постояииым и ввести обозиачение $A(q) = A(q_0) = m$. Лаграижиаи системы получает следующее окончательиое выражение: $L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2$.

С помощью формул (21.2) получаем диффереициальное уравнеиие движения системы:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{25.1}$$

Это простейшее лииейиое одиородиое дифференциальиое уравнеиие второго порядка с постояниыми коэффициентами. Для решения его разделим обе части равеиства на коэффициеит при высшей производной и одновременио введем обозиачеиие:

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0.$$

Уравиеиие примет вид: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Кории его характеристического уравиеиия

$$s^2 + \omega_0^2 = 0$$

будут миимыми сопряжеиными, т. е.

$$s_1 = i\omega_0, \; s_2 = -i\omega_0.$$

Общий интеграл нам известеи из теории линейиых дифференциальных уравнеиий:

$$x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t. \tag{25.2}$$

Если ввести иовые произвольиые постоянные, связаииые со старыми соотиошениями

$$C_1 = A\sin\alpha, \; C_2 = A\cos\alpha,$$

то общему иитегралу можно придать следующий вид: $x = A\sin(\omega_0 t + \alpha)$.

Система, как это видио из получеииого решеиия, совершает простые гармонические колебания с циклической частотой $\omega_0$.

Системы, совершающие колебания, принято называть *осцилляторами*. В даином случае мы имеем *гармонический осциллятор*.

Амплитуда $A$ и иачальиая фаза $\alpha$, являясь произвольиыми постояииыми интегрирования, определяются начальными условиями движеиия.

Пример 25.1. **Составление уравиеиия движеиия для крутильных колебаиий часового балаисира.**

Обобщениой координатой для колесика-балаисира служит угол $\varphi$ поворота

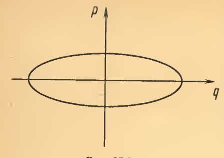


Рис. 25.2.

балансира от положения равновесия. Коэффициент инерции $m = I$ является моментом инерции балансира относительно оси вращения. Восстанавливающая (обобщенная) сила представляет момент, развивающийся при закручивании спиральной пружины (волоска). Величина момента силы пропорциональна углу $\varphi$, т. е. $Q = -k\varphi$. Дифференциальное уравнение колебаний балансира имеет вид: $I\ddot{\varphi} + k\varphi = 0$. Из уравнения для циклической частоты его колебаний получается значение

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I}},$$

откуда постоянство хода механических часов определяется постоянством циклической частоты колебаний балансира $\omega_0$.

**25.3. Фазовые траектории гармонического осциллятора.** Движение системы $n$ точек в реальном трехмерном пространстве можно рассматривать как движение одной изображающей точки в пространстве, образованном обобщенными координатами $q_k$. (Пространство конфигураций описано в § 19.)

Когда число координат фиктивного пространства невелико (оно уменьшается связями), возможны наглядные геометрические интерпретации движения системы по ее изображающей точке. Например, для гармонического осциллятора изображающая точка в пространстве конфигураций совершает гармонические колебания на оси $q$ (или $x$) около положения равновесия.

Колебания гармонического осциллятора могут быть рассмотрены и в фазовом пространстве $q$, $p$, описанном в § 23. Для этого используем выражение для полной механической энергии системы:

$$E = \frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{kq^2}{2} = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}.$$

Разделим обе части данного равенства на $E$:

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{2\frac{E}{k}} = 1.$$

Но это уравнение эллипса с полуосями

$$a = \sqrt{2mE}, \quad b = \sqrt{\frac{2E}{k}}.$$

Таким образом точка, изображающая систему, в фазовом пространстве в процессе движения находится *на эллипсе,* который и служит для системы *фазовой траекторией* (рис. 25.2). Так как площадь эллипса равна $\pi ab$, то с учетом значений $a$ и $b$ имеем:

$$\pi ab = 2\pi E\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi E}{\omega_0} = \frac{E}{\nu},$$

т. е. фазовый эллипс определяется энергией системы и частотой колебаний. (Последнее соотношение сыграло важную роль в квантовой

физике при формулировке правила квантования электронных орбит в атоме.)

Пример 25.2. **Составление и решение уравнений негармонических затухающих колебаний.**

Выше рассмотрены колебания системы без диссипативных сил. Однако на практике свободные колебания системы всегда *затухающие.* Затухание колебаний обусловлено наличием сил сопротивления среды движению тела. Подобные силы являются функциями скорости движения. При малых скоростях, с которыми имеем дело при малых колебаниях, силы сопротивления с достаточным приближением можно считать пропорциональными скорости. Для исследования влияния таких сил на процесс свободных колебаний нужно к квазиупругой обобщенной силе добавить слагаемое — $\beta\dot{x}$, где $\beta$ — коэффициент вязкого трения. Тогда дифференциальное уравнение движения приобретает следующий вид:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0.$$

Обозначим для сокращения записи

$$\frac{\beta}{m} = \gamma, \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2$$

и получим:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{25.3}$$

Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка, однородное, с постоянными коэффициентами.

Составляем для уравнения (25.3) характеристическое уравнение

$$s^2 + \gamma s + \omega_0^2 = 0.$$

Его корнями являются выражения

$$s_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}\,. \tag{25.4}$$

В зависимости от численных значений коэффициентов уравнения корни могут быть комплексными сопряженными или действительными. Этим двум случаям соответствуют разные движения системы.

Пусть $\omega_0 > \frac{\gamma}{2}$. Тогда корни характеристического уравнения можно представить в виде

$$s_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega',$$

а частные решения дифференциального уравнения для этого случая окажутся следующими:

$$x = e^{st} = e^{-\frac{\gamma}{2}t}e^{\pm i\omega' t} = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\cdot(\cos\omega' t \pm i\sin\omega' t).$$

Вещественная часть и множитель при мнимой единице комплексного решения по основному свойству линейного уравнения также являются его решениями. Это дает возможность сразу написать общий интеграл в вещественной форме:

$$x = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\cdot(C_1\cos\omega' t + C_2\sin\omega' t). \tag{25.5}$$

Преобразовав сумму, стоящую в скобках, как это показано в предыдущем параграфе, получаем другой вид общего интеграла уравнения:

$$x = A'e^{-\frac{\gamma}{2}t}\sin(\omega' t + \alpha'). \tag{25.6}$$

Хотя это решение и не представляет собой периодическую функцию времени, оно описывает колебательное движение, так как отклонение системы от положения равно-

весия через равные промежутки времени меняет знак, непрерывно уменьшаясь по абсолютной величине. Такое движение называется *затухающим колебанием.*

Величина

$$\omega' = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

является циклической частотой затухающих колебаний. Так как $\omega'$ всегда меньше $\omega_0$, сопротивление движению уменьшает частоту колебаний. Отношение абсолютных величин отклонений системы от положения равновесия, разделенных полупериодом колебаний $\frac{T}{2}$, определяет быстроту затухания колебаний; обозначим его через $\Delta$:

$$\Delta = \frac{|x(t)|}{\left|x\left(t + \frac{T}{2}\right)\right|} = e^{\frac{\gamma}{4}T}.$$

Величина

$$\delta = \ln\Delta = \frac{\gamma}{4}T$$

носит название логарифмического декремента затухания.

Рассмотрим теперь второй случай, когда $\frac{\gamma}{2} > \omega_0$. Корни характеристического уравнения, данные формулой (25.4), в этом случае будут вещественными отрицательными. Обозначив их через $-a_1$ и $-a_2$, получим общий интеграл в виде $x = C_1e^{-a_1t} + C_2e^{-a_2t}$.

Этому решению соответствует движение с монотонным убыванием отклонения от положения равновесия: изменений знака отклонения через равные промежутки времени здесь не происходит. Такое движение называется *апериодическим.*

В случае, когда $\frac{\gamma}{2} = \omega_0$, имеем один корень (кратный) характеристического уравнения и можем построить только одно частное решение. Второе частное решение нужно находить другим способом. Для нас существенно, что и в этом случае движение будет также апериодическим.

Пример 25.3. **Составление и решение уравнения вынужденных колебаний с учетом трения.**

Кроме квазиупругой силы и силы сопротивления, нужно учесть и внешнюю силу, являющуюся заданной функцией времени: $\vec{F} = \vec{F}(t)$. Дифференциальное уравнение движения будет иметь вид:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = F(t). \qquad (25.7)$$

Движение системы описывается теперь линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка. Общий интеграл неоднородного уравнения, как известно из курса математического анализа, равен сумме общего интеграла однородного уравнения, получающегося из (25.7) отбрасыванием правой части, и частного решения неоднородного уравнения (25.7).

Первое слагаемое описывает затухающие колебания, рассмотренные уже в примере 25.2. Второе слагаемое надо найти, оно определяется заданной внешней силой. Движение системы можно рассматривать как результат наложения на свободные колебания *вынужденных* колебаний, вызванных внешней периодической силой.

Так как свободные колебания являются затухающими, то по прошествии достаточно большого промежутка времени от начала движения они исчезают. Установившееся движение системы тогда описывается полностью частным решением неоднородного уравнения. Мы и ограничимся анализом только установившихся колебаний системы.

Наибольший интерес представляет периодическая внешняя сила, изменяющаяся по закону простого гармонического колебания: $F = F_0\cos\omega t$. Этот случай и будем рассматривать.

Дифференциальное уравнение движения имеет вид:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t. \qquad (25.8)$$

Здесь $F_0$ — амплитуда и $\omega$ — циклическая частота возмущающей силы. Для получения интересующего нас частного решения воспользуемся методом комплексной функции.

Заменим уравнение (25.8) на следующее:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}e^{i\omega t}. \qquad (25.9)$$

С учетом формулы Эйлера

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$$

и линейности уравнения заключаем, что вещественная часть решения уравнения (25.9) есть в то же время и решение интересующего нас уравнения (25.8). Поэтому для получения частного решения уравнения (25.8) решаем уравнение (25.9) и выделяем в решении вещественную часть. Ищем частное решение в виде

$$x = Be^{i\omega t}. \qquad (25.10)$$

После подстановки предполагаемого решения в (25.9) и сокращения на общий множитель $e^{i\omega t}$ получаем алгебраическое уравнение для определения постоянной $B$:

$$B(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2) = \frac{F_0}{m}.$$

Находим $B$ и преобразуем полученное выражение к показательной форме комплексного числа:

$$B = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} = \frac{F_0}{m}\frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}},$$

где

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Вносим значение $B$ в решение (25.10) и выделяем вещественную часть:

$$x = \frac{\frac{F_0}{m}\cos(\omega t - \varphi)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}. \qquad (25.11)$$

Это выражение описывает вынужденные колебания системы.

Проведем краткое исследование движения системы. Прежде всего отметим, что вынужденные колебания являются незатухающими простыми гармоническими колебаниями, происходящими с частотой возмущающей силы $\omega$. По фазе вынужденные колебания отстают от возмущающей силы на угол $\varphi$, величина и знак которого зависят от соотношения между собственной частотой колебания системы $\omega_0$ и частотой возмущающей силы $\omega$. Самым существенным является наличие зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты возмущающей силы:

$$A(\omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}.$$

Система обладает избирательными (селективными) свойствами «ответа» на внешние гармонические воздействия. При одной и той же возмущающей силе вызываемые ею колебания системы имеют различную амплитуду. При значении $\omega = \omega_r$, которому соответствует минимальное значение подкоренного выражения, амплитуда вынужденных колебаний будет максимальной. Это *резонанс*. Резонансную частоту $\omega_r$ получаем

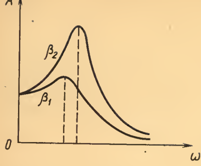



Рис. 25.3.

приравниванием нулю производной подкоренного выражения:

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}}.$$

При малых значениях коэффициента вязкости $\beta = m\gamma$ резонансная частота близка к частоте собственных колебаний системы. На рисунке 25.3 изображен график зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты возмущающей силы (резонансная кривая) при различных значениях коэффициента вязкости $\beta$. Острота максимума кривой самым существенным образом зависит от затухания свободных колебаний системы. Для кривых, изображенных на рисунке, $\beta_1 > \beta_2$. Для резонансной частоты сдвиг по фазе вынужденных колебаний мало отличается от $\varphi = 90°$ и вся работа внешней силы затрачивается на преодоление сопротивления движению системы (при установившихся колебаниях). Для частот, сильно отличающихся от частоты собственных колебаний системы, сдвиг фазы не равен 90° и работа внешней силы в отдельные части периода колебаний может быть отрицательной, т. е. система отдает энергию телам, вынуждающим колебания.

Пример 25.4. **Составление и решение уравнения вынужденных колебаний гармонического осциллятора без учета сопротивления.**

В рассматриваемом случае колебаний без трения дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t + \varphi_0). \tag{25.12}$$

(При этом мы ввели начальную фазу $\varphi_0$ в выражение возмущающей силы.) Общий интеграл этого уравнения, как видно из предыдущего, будет равен сумме общего интеграла соответствующего однородного уравнения (25.12) и частного решения рассматриваемого уравнения (25.12). Последнее получим из (25.11), положив $\gamma = 0$ и учитывая наличие $\varphi_0$. Тогда

$$x = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t + \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos(\omega t + \varphi_0). \tag{25.13}$$

Решение представляет суперпозицию гармонических колебаний, причем последнее слагаемое в формуле (25.13) имеет амплитуду, зависящую от частоты вынуждающей силы. Резонанс осуществляется при $\omega = \omega_0$, и решение теряет смысл ($x = \infty$, так как не учтено сопротивление движению). При $\omega$, значительно отличающейся от $\omega_0$, последним членом можно пренебречь и рассматривать только простое гармоническое колебание. Особый интерес представляет движение системы вблизи резонанса. Рассмотрим это движение.

Сначала найдем произвольные постоянные интегрирования в формуле (25.13) при заданных условиях: $x|_{t=0} = x_0$, $\dot{x}|_{t=0} = \dot{x}_0$.

Получим:

$$C_1 = x_0 + \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\varphi_0, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0}.$$

Общий интеграл примет вид:

$$x = x_0\cos\omega_0 t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\sin\omega t - \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\varphi_0\cos\omega_0 t +$$

$$+ \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2}(\cos\omega t\cos\varphi_0 - \sin\omega t\sin\varphi_0).$$

Чтобы наглядно выяснить характер движения системы при приближении к резонансу, положим, что $\omega_0 - \omega = \varepsilon$ — величина малая по сравнению с $\omega$. Тогда

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) = \varepsilon(\omega_0 + \omega_0 - \varepsilon) \approx 2\omega_0\varepsilon.$$

(Пренебрегли квадратом $\varepsilon$.) Полагая для упрощения результата $x = \dot{x}_0 = 0$ и $\varphi_0 = 0$, получим:

$$x = \frac{F_0}{2m\omega_0\varepsilon}(\cos\omega t - \cos\omega_0 t) = \frac{F_0}{2m\omega_0\varepsilon}[\cos(\omega_0 - \varepsilon)t - \cos\omega_0 t] =$$

$$= \frac{F_0}{m\omega_0\varepsilon}\sin\frac{\varepsilon t}{2}\sin\left(\omega_0 - \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Пренебрегая малой величиной $\varepsilon$, запишем решение уравнения в окончательной форме:

$$x = \frac{F_0}{m\omega_0\varepsilon}\sin\frac{\varepsilon t}{2}\sin\omega_0 t = \Phi(t)\sin\omega_0 t.$$

Так как $\varepsilon \ll \omega_0$, то функцию $\Phi(t)$ можно считать амплитудой колебаний системы с частотой $\omega_0$, медленно изменяющейся по синусоидальному закону. Это *биения*, полученные при сложении собственных колебаний системы с частотой $\omega_0$ и вынужденных колебаний с частотой, отличающейся на малую величину $\varepsilon$.

При резонансе вид функции изменяется:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\sin\frac{\varepsilon t}{2} = \frac{t}{2}.$$

Колебания принимают вид:

$$x = \frac{F_0 t}{2m\omega_0}\sin\omega_0 t.$$

Амплитуда их линейно растет со временем, и при $t \to \infty$ отклонения могут стать сколь угодно большими, а система разрушится. На практике беспредельному росту амплитуды препятствуют силы сопротивления, которые нельзя уничтожить. Компенсация же их приводит к колебаниям с ограниченной амплитудой, как это показано в предыдущем параграфе.

## § 26. Колебания систем с несколькими степенями свободы

**26.1. Малые колебания системы с несколькими степенями свободы.** В этом параграфе приведем краткие сведения из теории малых *свободных* колебаний систем с несколькими степенями свободы. Для упрощения рассуждений рассматриваем систему с двумя степенями свободы (пример такой системы разобран ниже). Полученные для нее результаты можно обобщить на систему с большим числом степеней свободы.

Пусть $q_1$ и $q_2$ — обобщенные координаты системы; причем сразу примем, что $q_1 = 0$ и $q_2 = 0$ соответствуют положению устойчивого равновесия.

Тогда для потенциальной энергии системы $U(q_1, q_2)$ будем иметь следующие условия:

$$U(0, 0) = 0, \left(\frac{\partial U}{\partial q_1}\right)_0 = 0, \left(\frac{\partial U}{\partial q_2}\right)_0 = 0.$$

Первое условие есть следствие нормировки потенциальной энергии, а второе необходимо для минимума потенциальной энергии

в положении равновесия. Разлагаем теперь потенциальную энергию в ряд:

$$U(q_1, q_2) = U(0, 0) + \left(\frac{\partial U}{\partial q_1}\right)_0 q_1 + \left(\frac{\partial U}{\partial q_2}\right)_0 q_2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\right)_0 q_1^2 + \right.$$

$$\left. + 2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_0 q_1 q_2 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2}\right) q_2^2\right] + \ldots$$

Ограничимся в разложении квадратичными членами и введем обозначения:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\right)_0 = k_{1,1}, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_0 = k_{1,2}, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2}\right)_0 = k_{2,2}.$$

Приходим к приближенному выражению для потенциальной энергии системы:

$$U = \frac{1}{2}(k_{1,1} q_1^2 + 2k_{1,2} q_1 q_2 + k_{2,2} q_2^2) = \frac{1}{2}\sum_{i,k}^{2} k_{i,k} q_i q_k.$$

Она оказалась положительной однородной квадратичной формой обобщенных координат. Связи, ограничивающие свободу движения, рассматриваются в задаче только стационарные идеальные. Для кинетической энергии системы имеем поэтому также однородную квадратичную форму обобщенных скоростей (см. пример 20.8):

$$T = \frac{1}{2}(m_{1,1}\dot{q}_1^2 + 2m_{1,2}\dot{q}_1\dot{q}_2 + m_{2,2}\dot{q}_2^2) = \frac{1}{2}\sum_{i,k}^{2} m_{i,k}\dot{q}_i\dot{q}_k.$$

Коэффициенты инерции $m_{i,k}$ в рассматриваемом приближении будут постоянными числами. Лагранжиан системы для движений вблизи положения устойчивого равновесия имеет следующий вид:

$$L = T - U = \frac{1}{2}\sum_{i,k}^{2}(m_{i,k}\dot{q}_i\dot{q}_k - k_{i,k} q_i q_k).$$

Находим значения производных от функции Лагранжа, нужные для составления уравнений движения системы:

$$-\frac{\partial L}{\partial q_1} = k_{1,1}q_1 + k_{1,2}q_2, \qquad -\frac{\partial L}{\partial q_2} = k_{2,2}q_2 + k_{1,2}q_1,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = m_{1,1}\dot{q}_1 + m_{1,2}\dot{q}_2, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_{2,2}\dot{q}_2 + m_{1,2}\dot{q}_1.$$

Подставляя найденные значения производных в уравнение Лагранжа (21.2) и проведя простые выкладки, приходим к системе двух линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, описывающей малые свободные колебания механической системы с двумя степенями свободы:

$$\begin{cases} m_{1,1}\ddot{q}_1 + m_{1,2}\ddot{q}_2 + k_{1,1}q_1 + k_{1,2}q_2 = 0, \\ m_{1,2}\ddot{q}_1 + m_{2,2}\ddot{q}_2 + k_{1,2}q_1 + k_{2,2}q_2 = 0. \end{cases} \tag{26.1}$$

Ищем решение системы в виде следующих комплексных функций:

$$q_1 = A_1 e^{i\omega t},\ q_2 = A_2 e^{i\omega t}, \qquad (26.2)$$

где $A_1$, $A_2$ и $\omega$ — постоянные, которые подлежат определению. После подстановки предполагаемого решения в дифференциальные уравнения (26.1) приходим к алгебраической системе двух линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} (-\omega^2 m_{1,1} + k_{1,1})A_1 + (-\omega^2 m_{1,2} + k_{1,2})A_2 = 0, \\ (-\omega^2 m_{1,2} + k_{1,2})A_1 + (-\omega^2 m_{2,2} + k_{2,2})A_2 = 0. \end{cases} \qquad (26.3)$$

Система допускает отличные от нулевых (нетривиальные) решения, если определитель системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 m_{1,1} + k_{1,1} & -\omega^2 m_{1,2} + k_{1,2} \\ -\omega^2 m_{1,2} + k_{1,2} & -\omega^2 m_{2,2} + k_{2,2} \end{vmatrix} = 0. \qquad (26.4)$$

В форме определителя (26.4) записано уравнение, называемое характеристическим или вековым: оно определяет значение постоянной $\omega$. В нашем случае характеристическое уравнение биквадратное и для $\omega^2$ получаются два значения $\omega_1^2$ и $\omega_2^2$, что приводит к двум вещественным положительным $\omega_1$ и $\omega_2$. По физическому смыслу величины $\omega_1$ и $\omega_2$ являются *собственными частотами* колебаний системы; *число их всегда равно числу степеней свободы.*

Подставляя в уравнение (26.3) допустимые значения собственных частот $\omega = \omega_1, \omega_2$, можно вычислить соответствующие значения всех коэффициентов:

$$A_1 = A_1^{(1)},\ A_1^{(2)},$$
$$A_2 = A_2^{(1)},\ A_2^{(2)}.$$

После этого можно написать частные решения (26.2) системы в виде

$$q_1 = A_1^{(1)} e^{i\omega_1 t} + A_1^{(2)} e^{i\omega_2 t},\ q_2 = A_2^{(1)} e^{i\omega_1 t} + A_2^{(2)} e^{i\omega_2 t}. \qquad (26.5)$$

Каждое слагаемое в частных решениях в силу линейности дифференциальных уравнений также есть решение системы. Умножая эти решения-слагаемые на произвольные постоянные и суммируя, получаем общее решение системы (26.1) в комплексной форме

$$\begin{cases} q_1 = C_1^{(1)} A_1^{(1)} e^{i\omega_1 t} + C_1^{(2)} A_1^{(2)} e^{i\omega_2 t}, \\ q_2 = C_2^{(1)} A_2^{(1)} e^{i\omega_1 t} + C_2^{(2)} A_2^{(2)} e^{i\omega_2 t}. \end{cases} \qquad (26.6)$$

Координаты $q$ — величины вещественные, поэтому получаем вещественные решения аналогично формуле (25.2):

$$\begin{cases} q_1 = C_{1,1} B_1 \cos(\omega_1 t + \beta_1) + C_{1,2} B_2 \cos(\omega_2 t + \beta_2), \\ q_2 = C_{2,1} B_1 \cos(\omega_1 t + \beta_1) + C_{2,2} B_2 \cos(\omega_2 t + \beta_2), \end{cases} \qquad (26.7)$$

где $C_{ik}$ — новые произвольные постоянные интегрирования, а константы $B$ и $\beta$ заменили найденные ранее $A_k^i$.

Наиболее существенным отличием малых колебаний системы с несколькими степенями свободы от системы с одной степенью свободы является *наложение друг на друга простых гармонических колеба-*

*ний с различными собственными частотами для каждой степени свободы.* Так как число собственных частот колебаний системы равно числу степеней ее свободы, то при воздействии на систему внешней периодической силы резонанс имеет место при приближении частоты возмущающей силы к любой из собственных частот.

Изложенные выше элементы теории линейных колебаний описывают процессы колебаний не только механических систем. Колебания, имеющие место в электрических цепях, как это показано в курсе электродинамики, описываются дифференциальными уравнениями, аналогичными рассмотренным выше.

Важной особенностью дифференциальных уравнений, описывающих малые колебания, является их *линейность.* По этой причине малые колебания получили название линейных. Линейные колебания системы сравнительно просты, подчиняются принципу суперпозиции, но они не до конца исчерпывают реальные колебания, так как линейность дифференциальных уравнений является результатом пренебрежения членами высших порядков малости в разложении потенциальной энергии по степеням отклонений системы от положения равновесия. Учет высших членов приводит к нелинейным дифференциальным уравнениям. За последние десятилетия интерес к нелинейным колебаниям значительно усилился в связи с научно-техническим прогрессом.

В развитии теории нелинейных колебаний основной вклад сделан советскими физиками и математиками, в частности Л. И. Мандельштамом, А. А. Андроновым, Н. Н. Боголюбовым и другими.

**26.2*. Понятие о нормальных координатах.** Рассматривая колебания системы с двумя степенями свободы, мы нашли, что каждая обобщенная координата испытывает два гармонических колебания с разными частотами, т. е. совершает *негармоническое* колебание. Докажем, что величины

$$\begin{cases} Q_1 = B_1 \cos(\omega_1 t + \beta_1), \\ Q_2 = B_2 \cos(\omega_2 t + \beta_2) \end{cases} \tag{26.8}$$

могут быть приняты за новые обобщенные координаты системы. Для этого необходимо установить формулы их связи со старыми координатами $q$. Подставляя выражения (26.8) в найденные выше кинематические уравнения колебаний (26.7), получаем искомые формулы перехода от одних координат к другим:

$$\begin{cases} q_1 = C_{1,1} Q_1 + C_{1,2} Q_2, \\ q_2 = C_{2,1} Q_1 + C_{2,2} Q_2, \end{cases} \tag{26.9}$$

нужно только систему уравнений (26.9) решить относительно $Q$.

В новых координатах $Q$ уравнения колебаний для каждой степени свободы являются независимыми и гармоническими, как это показывают выражения (26.8). Такие координаты называются *нормальными* или *главными.* В нормальных координатах система сводится к набору гармонических осцилляторов, каждый из которых определяется уравнением

$$\ddot{Q}_i + \omega_i^2 Q_i = 0. \tag{26.10}$$

Соответственно кинетическая и потенциальная энергии, лагранжиан в этих координатах принимают простейший вид:

$$T = \frac{1}{2}(m_1 \dot{Q}_1^2 + m_2 \dot{Q}_2^2),\ U = \frac{1}{2}(k_1 Q_1^2 + k_2 Q_2^2),\ L = T - U, \tag{26.11}$$

где $m$ — коэффициент инерции (см. пример 20.7), а $k$ — коэффициент квазиупругих сил, причем $k = \omega^2 m$.

Переход к нормальным координатам можно рассматривать и осуществлять как преобразование координат, дающее кинетическую и потенциальную энергии в виде формул (26.11). Этот путь и реализуется на практике.

Пример 26.1. **Колебаиия системы с двумя степенями свободы и выбор иормальных коордиат.**

Рассмотрим движение тяжелой точки, подвешеииой на пружиие (рис. 26.1). Для составления уравнеиий запишем киветическую и потеициальиую эиергии точки в выбранных для задачи полярных коордиватах:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2),$$
$$U = -mgr\cos\varphi + \frac{k}{2}(r - l)^2,$$

где $l$ — длииа пружииы.

Далее следует иайти разложеиие $U$ около положеиия равиовесия, для чего потребуются первые и вторые производиые фуикции $U$. Вычислим их:

$$\frac{\partial U}{\partial r} = -mg\cos\varphi + k(r - l),\ \frac{\partial U}{\partial\varphi} = mgr\sin\varphi,$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = k,\ \frac{\partial^2 U}{\partial r\partial\varphi} = mg\sin\varphi,\ \frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} = mgr\cos\varphi.$$

В положеиии равиовесия $\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial\varphi} = 0$, поэтому получаем два уравиеиия:

$$\begin{cases} -mg\cos\varphi + k(r - l) = 0, \\ mg\, r\sin\varphi = 0, \end{cases}$$

откуда иаходим зиачеиия коордииат точки в положеиии равиовесия:

$$\varphi_0 = 0,\ r_0 = l + \frac{mg}{k}.$$

Это устойчивое равиовесие. Запишем киветическую эиергию системы как функцию иовых коордииат: $\Delta r = r - r_0$ и $\varphi$, а также разложим потеициальиую эиергию около точки равиовесия. Получим формулы

$$T = \frac{m}{2}\left[(\Delta\dot{r})^2 + r_0^2\dot{\varphi}^2\right];\ U = \frac{1}{2}\left[k(\Delta r)^2 + mgr_0\varphi^2\right].$$

Из иих видио, что коордииата $\Delta r = r - r_0$ и коордииата $\varphi$ являются иормальными для даииой системы, а уравиеиия Лаграижа для ее движения оказываются иезависимыми:

$$m\Delta\ddot{r} + k\Delta r = 0,\ r_0\ddot{\varphi} + g\varphi = 0.$$

Теперь иаходятся решеиия — это гармоиические колебаиия величии $\Delta r$ и $\varphi$:

$$\Delta r = a_1\cos(\omega_1 t + \beta_1),\ \varphi = a_2\cos(\omega_2 t + \beta_2),$$

где

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m},\ \omega_2^2 = \frac{g}{r_0}.$$

Из решеиия в иормальиых коордииатах ясеи его физический смысл: колебаиия материальиой точки складываются из гармоиических колебаиий ее вдоль оси пружииы и пружииы как математического маятиика.

Пример 26.2. **Нахождеиие частот иормальиых колебаиий трехмериого гармоиического осциллятора.**

Материальиая точка иаходится в постояииом поле, в котором ее потеициальиая эиергия $U(x, y, z)$ имеет точку миинмума. В качестве обобщеииых коордииат вы-

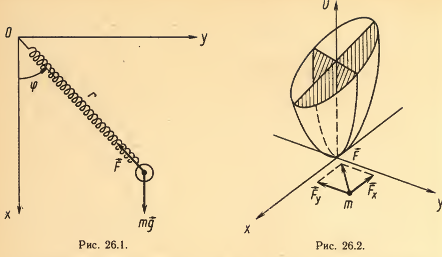



Рис. 26.1. Рис. 26.2.

бираем декартовы, имеющне начало в точке, где $U$ мннимальна. Кнетическая эиергия определяется одиородной квадратнчной функцней скоростей:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

а потеициальиая — формулой:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{3} k_{ik}x_ix_k \quad (x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z).$$

Повернем оси координат так, что потенциальная эиергня также будет одиородиой квадратичной функцией координат:

$$U = \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2 + k_3z^2).$$

Такой поворот соответствует совмещению осей координат с тремя ортогональнымн экстремальными составляющими квазнупругой снлы, показанными на рнсунке 26.2 для двухмерного случая[1]. Вдоль этнх новых положений осей колебання, как это установлено при изученнн нормальных координат, гармонические, поэтому частоты их иаходятся по формулам

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}},\ \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m}},\ \omega_3 = \sqrt{\frac{k_3}{m}}.$$

П р н м е р 26.3. **Колебания плоского двойного маятника в нормальных координатах.**

Плоскнй двойной маятинк рассмотрен в прнмере 21.1 (см. рис. 21.1). Получены выражения для кинетической н потенциальной энергий:

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)a^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_2b^2\dot{\vartheta}^2 + abm_2\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\cos(\varphi - \vartheta),$$

$$U = -ga(m_1 + m_2)\cos\varphi - m_2gb\cos\vartheta,$$

$$\frac{\partial U}{\partial\varphi} = -g(m_1 + m_2)a\sin\varphi;\ \frac{\partial U}{\partial\vartheta} = -m_2gb\sin\vartheta.$$

Из этнх выражений определяется положенне равновесия $\varphi = \vartheta = 0$. Равновесие

[1] Прн смещеиин точкн по такой оси квазиупругая сила направлена вдоль осн.

устойчивое, так как

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = g(m_1 + m_2)\,a\cos\varphi,\ \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} = m_2 g b\cos\vartheta,\ \frac{\partial^2 U}{\partial\varphi\partial\vartheta} = 0.$$

Кинетическая энергия около положения равновесия выражается формулой

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,a^2\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}m_2 b^2\dot\vartheta^2 + m_2 ab\dot\varphi\dot\vartheta,$$

потенциальная:

$$U = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,ga\varphi^2 - \frac{1}{2}m_2 gb\vartheta^2.$$

Система лагранжевых уравнений движения в соответствии с формулами (21.2) такова:

$$(m_1 + m_2)\,a\ddot\varphi + m_2 b\ddot\vartheta + (m_1 + m_2)\,g\varphi = 0,$$
$$a\ddot\varphi + b\ddot\vartheta + g\vartheta = 0.$$

Для перехода к нормальным координатам выполняем подстановку (26.2) и получаем систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} A_1(m_1 + m_2)\,(g - a\omega^2) - A_2\omega^2 m_2 b = 0,\\ -A_1 a\omega^2 + A_2(g - b\omega^2) = 0.\end{cases}$$

Корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} (m_1 + m_2)\,(g - a\omega^2) & -\omega^2 m_2 b \\ -a\omega^2 & (g - b\omega^2)\end{vmatrix} = 0$$

дают искомые частоты накладывающихся друг на друга колебаний, описываемых уравнениями (26.5) для каждой координаты. Вычислим их:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g}{2m_1 ab}\left\{(m_1 + m_2)\,(a + b) \pm \sqrt{(m_1 + m_2)\,[(m_1 + m_2)\,(a + b) - 4m_1 ab]}\right\}.$$

Как видим, результат довольно сложный. Рассмотрим его в частном случае (при $m_1 \gg m_2$). В таком случае приближенно имеем:

$$U = -\frac{1}{2}m_1 ga\varphi^2 - \frac{1}{2}m_2 gb\vartheta^2,$$
$$T = \frac{1}{2}m_1 a^2\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}m_2 b^2\dot\vartheta^2.$$

Координаты $\varphi$ и $\vartheta$ оказались в приближении нормальными; лагранжевые уравнения движения имеют вид:

$$\ddot\varphi + \frac{g}{a}\varphi = 0,\ \ddot\vartheta + \frac{g}{b}\vartheta = 0.$$

Они независимы, а решения их легко находятся:

$$\varphi = \varphi_0\cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\,t + \alpha\right),\ \vartheta = \vartheta_0\cos\left(\sqrt{\frac{g}{b}}\,t + \beta\right).$$

Таков окончательный приближенный результат решения задачи на кинематические уравнения колебания маятника в нормальных координатах.

## ГЛАВА VIII. ДВИЖЕНИЕ В ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ ПОЛЕ

В соответствии с механической концепцией силы взаимодействия между двумя свободными материальными точками имеют центральный характер (см. § 5). Центральны в нерелятивистском приближении фундаментальные гравитационные и электромагнитные силы взаимодействия двух точек. Но в таком случае силовое поле, создан-

ное материальиой точкой в системе отсчета, где точка покоится, постояиио и обладает центральной снмметрией. Еслн начало координат системы совместнть с точкой, создающей поле, то

$$\vec{F} = \vec{F}(r), \; U = U(r), \tag{27.1}$$

где $r$ — модуль радиус-вектора произвольиой точки поля.

Таким образом, задача о двнжеиии в центрально-снмметричном поле оказывается для механики фундаментальиой. То, что она решается в конце курса, объясияется иеобходнмостью опнраться при ее рассмотреиии на положеиия и методы, развнтые в курсе ранее. Но к аиализу отдельных сторон движеиия под действием центральиых сил мы обращалнсь уже не раз. Так, было устаиовлено, что при движеиии точки в поле центральной силы сохраияется момент импульса, а траекторней двнжения служит плоская кривая (см. § 10). Рассматривался прнмер (12.7) получеиия вторых интегралов движеиия, задача о двнженни системы двух взаимодействующнх точек сведена к двнжеиию одиой точки. В этой главе курса изучим двнжение материальиой точки в поле центральной снлы подробиее.

## § 27. Кеплерова задача

**27.1. Уравнения движения точки в центрально-симметричном поле. Одномерный эффективный потенциал поля.** В истории фнзнки кеплеровой называется задача определеиня траекторни небесного тела, двнжущегося в поле тяготення Солнца. Аналогичная задача возинкает при классическом подходе к проблеме движення электрона в поле ядра.

Как уже отмечено, к понятию центрально-снмметрнчиого поля в механике прнходят в связн с рассмотреиием взаимодействия двух материальных точек. В § 15 показаио, что сначала в этом случае нужно рассмотреть двнженне одиой (изображающей) точки с приведенной массой под действием силы взаимодействия между точками в системе отсчета с неподвижным центром масс, т. е. двнжеиие материальиой точки в центральио-снмметрнчном поле, а затем перейти к движеиию каждой точки.

Ранее устаиовлено, что под действнем виутренних сил центр масс системы движется равномерио и прямолннейио. Свяжем с ним иекоторую систему отсчета, являющуюся инерциальной, и в ней будем рассматрнвать двнжение изображающей точкн под действием центральной силы, которая завнсит только от расстояння между точками, т. е. $\vec{F} = \vec{F}(r)$; аналогично выражение и для потенциальной энергии $U = U(r)$.

Так как вектор момеита импульса $\vec{L} = m'[\vec{r}\,\vec{v}]$ сохраияется в случае центральиой силы по модулю и направлению, то все $r$ лежат в одной плоскости, т. е. траекторией является плоская крнвая, поэтому у изображающей точки две степени свободы, и для случая центральиого поля целесообразен выбор поляриых координат в плоскости движеиия с иачалом в центре масс. В иих интеграл момеита импульса

имеет вид:

$$m'r^2\dot{\varphi} = L, \qquad (27.2)$$

а интеграл энергии запишется формулой

$$\frac{m'}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = E. \qquad (27.3)$$

В принципе эти два дифференциальных уравнения первого порядка относительно неизвестных функций $r(t)$ и $\varphi(t)$ и исчерпывают задачу о движении точки в центрально-симметричном поле. Для их решения достаточно подставить известное значение $L$ с помощью (27.2) в (27.3), чтобы получить уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{m'\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2m'r^2} + U(r) = E. \qquad (27.4)$$

Первый член в этом уравнении представляет кинетическую энергию при радиальном движении точки, которая всегда положительна. Второй член теперь не содержит скорости и называется *центробежной потенциальной энергией.* Таким образом, потенциальная энергия может считаться состоящей из двух частей:

$$U_e(r) = U(r) + \frac{L^2}{2m'r^2}. \qquad (27.5)$$

Выражение (27.5) принято называть *эффективным потенциалом.* Он может быть положительным, отрицательным и нулем в зависимости от соотношения модулей центробежного и обычного потенциала и от знака потенциала $U(r)$.

Используя обозначение $U_e$, находя из (27.4) $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ и разделяя переменные в уравнении (27.4), получаем интеграл уравнения движения:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m'}[E - U_e(r)]}} + t_0. \qquad (27.6)$$

Если вычислить интеграл в (27.6), то при любом заданном $U(r)$ найдется одно кинематическое уравнение движения точки $r = r(t)$.

Аналогично получается другое уравнение из (27.2):

$$\varphi = \frac{L}{m'}\int \frac{dt}{r^2} + \varphi_0, \qquad (27.7)$$

что при найденном $r(t)$ дает возможность получить $\varphi(t)$. Задача о движении точки в центральном поле $U(r)$ решена: направление вектора момента импульса позволяет установить плоскость, в которой движется точка, а его модуль — значение энергии и начальное положение точки ($\varphi_0$ в момент $t_0$) — выбрать необходимое частное решение из (27.6) и (27.7). Нетрудно в общем виде получить и уравнение траектории. Для этого из равенства (27.6) определим $dt$ и подставим

в (27.2), после чего получнм, разделяя переменные и нntегрируя:

$$\varphi = \int \frac{L/r^2}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U_e(r)]}} dr + \varphi_0. \qquad (27.8)$$

Заметим, что в процессе решення опущен второй знак у квадратного корня. Налнчне двух знаков связано с снмметрией траекторнн, которая вндна в конкретных случаях.

**27.2. Движение в поле силы тяготения.** Вообще говоря, могут нметь место разнообразные центрально-снмметрнчные поля по завнснмостн $U$ от $r$. Однако нанбольшнй практнческий ннтерес в механике представляет случай силы, управляющей движеннем небесных тел. Снла тяготення, прнложенная к небесному телу, определяется законом всемнрного тяготення:

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^3}\vec{r} = -\gamma\frac{m}{r^3}\vec{r}.$$

Задачу о двнженнн двух тел под действнем этой силы и называют кеплеровой. Пронзведенне гравитационной постоянной на массу Солнца для сокращення запнсн обозначено через $\gamma$; называется эта велнчнна *гауссовой постоянной.*

Для движення материальной точкн в поле снлы тяготення верны все полученные в предыдущем параграфе результаты. Найдем сейчас конкретный внд траекторнн движения.

Воспользуемся выраженнем потенциальной энергнн (11.17) н составнм лагранжиан:

$$L_л = T - U = \frac{1}{2} m'(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \gamma\frac{m}{r}, \qquad (27.9)$$

где $m'$ — прнведенная масса точки, изображающей систему. Полярный угол $\varphi$ является циклнческой коорднватой, а поэтому нмеет место интеграл площадей:

$$p_\varphi = \frac{\partial L_л}{\partial\dot{\varphi}} = \text{const},$$

нлн

$$r^2\dot{\varphi} = C. \qquad (27.10)$$

Постоянная $C$ является удвоенной секторной скоростью.

Теперь достаточно составнть только одно уравненне

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_л}{\partial\dot{r}} - \frac{\partial L_л}{dr} = 0,$$

которое после проведения указанных в нем днфференцнрований н сокращення на массу будет нметь вид:

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 + \frac{m}{m'}\,\frac{\gamma}{r^2} = 0,$$

где $\frac{m}{m'} = \frac{m(m+M)}{mM} = \left(1 + \frac{m}{M}\right) = k$

— велнчнна, блнзкая к еднннице, так как обычно $m \leqslant M$.

Пользуясь интегралом площадей, исключим из последнего уравнения $\varphi$, и оно приведется к уравнению для одной искомой функции $r$:

$$\ddot{r} - \frac{C^2}{r^3} + \frac{k\gamma}{r^2} = 0. \qquad (27.11)$$

Наша задача состоит в нахождении траектории небесного тела $r = r(\varphi)$. Поэтому целесообразно перейти от дифференцирования по времени к дифференцированию по полярному углу. Из интеграла площадей следует:

$$\dot{\varphi} = \frac{C}{r^2}, \quad \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi} = \frac{C}{r^2}\frac{dr}{d\varphi},$$

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{C}{r^2}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{C}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right).$$

Подстановка найденного выражения $\ddot{r}$ в уравнение (27.11) приводит последнее к виду

$$\frac{C^2}{r^2}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right) - \frac{C^2}{r^3} = -\frac{k\gamma}{r^2}.$$

Для упрощения полученного дифференциального уравнения сделаем последнюю подстановку: $r = \frac{1}{x}$. Имеем:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dx}{d\varphi}, \quad \frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{dx}{d\varphi}.$$

Дифференциальное уравнение для $x = x(\varphi)$ принимает следующий окончательный вид:

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2} + x = \frac{k\gamma}{C^2}. \qquad (27.12)$$

Общий интеграл этого линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами находим обычными приемами:

$$x = x_1 + x_2 = \frac{k\gamma}{C^2} + A\cos(\varphi + \alpha).$$

Здесь частное решение неоднородного уравнения есть $x_1$, а общее решение однородного уравнения — $x_2$; $A$ и $\alpha$ — произвольные постоянные интегрирования. Возвращаясь к первоначальным обозначениям, приводим общий интеграл уравнения к окончательному виду:

$$r = \frac{1}{\frac{k\gamma}{C^2} + A\cos(\varphi + \alpha)} = \frac{C^2/\gamma k}{1 + \frac{AC^2}{k\gamma}\cos(\varphi + \alpha)}. \qquad (27.13)$$

Общий интеграл дает уравнение кривой второго порядка в полярных координатах:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi + \alpha)}, \qquad (27.14)$$

где

$$p = \frac{C^2}{k\gamma}, \; e = \frac{AC^2}{k\gamma} \tag{27.15}$$

— параметр и эксцентриситет орбиты. В зависимости от численного значения эксцентриситета уравнение представляет эллипс, параболу или гиперболу. Если $e < 1$ — имеем уравнение эллипса, при $e = 1$ — уравнение параболы, а при $e > 1$ — гиперболы.

Вид траектории и ее параметры определяются константами $C$ и $A$, причем $C$ связана с интегралом момента импульса, $L = mC$; $A$ определяется полной энергией $E$, а постоянная интегрирования $\alpha$ задает положение траектории на плоскости.

Интеграл энергии (27.3) имеет вид:

$$\frac{m'\dot{r}^2}{2} + U_e(r) = E, \tag{27.16}$$

где эффективный потенциал выражается формулой

$$U_e = -\frac{\gamma m'}{r} + \frac{1}{2}\frac{mC^2}{r^2}. \tag{27.17}$$

Для анализа допустимых траекторий выразим из (27.16) кинетическую энергию радиального движения:

$$\frac{m'\dot{r}^2}{2} = E - U_e \geqslant 0. \tag{27.18}$$

Построим график (рис. 27.1) $U_e$ и проведем прямые $E = \text{const}$ для различных значений полной механической энергии. $U_e$ при $r \to 0$ стремится к бесконечности, а при $r \to \infty$ отрицателен и стремится к нулю. Следовательно, график пересечет один раз ось $r$ и будет иметь вид, изображенный на чертеже.

Условие $E - U_e \geqslant 0$ выполняется для следующих движений:

1. Если $E_1 > 0$, то $r_1 \leqslant r \leqslant \infty$. Движение инфинитное и соответствует гиперболическому.

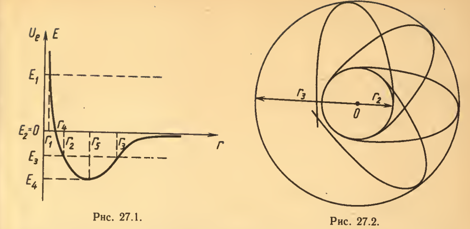
2. Если $E_2 = 0$, то $r_4 \leqslant r \leqslant \infty$. Движение инфинитное и соответствует параболическому.

3. Если $E_3 < 0$, то $r_2 \leqslant r \leqslant r_3$. Движение финитное и соответствует эллиптическому.

4. Если $E_4 < 0$, то $r = r_5 = \text{const}$. Движение финитное и происходит по окружности.

Оказывается, что в общем случае для зависимостей $U(r)$, не сводящихся к рассмотренной в данной задаче, и $U = \frac{kr^2}{2}$, рассмотренной в примере 27.3, замкнутой траектории при финитном движении не получается, а движение происходит между «поворотными» точками $r_2$ и $r_3$ по траектории, изображенной на рисунке 27.2.

В заключение вопроса о движении тела в поле силы притяжения к Солнцу заметим, что изображающая точка движется по найденному эллипсу (27.14), а к эллипсу *планеты* можно перейти с учетом формул (15.1), (15.8) и рисунка 15.4. Солнце не остается неподвиж-




Рнс. 27.1.

Рнс. 27.2.

ным, центр его соответственно перемещается относительно центра масс системы Солнце — планета.

Пример 27.1. **Вывод законов Кеплера из закона всемириого тяготения.**

В иачале XVII в. Кеплером были устаиовлены кннематнческие законы двнжения планет на основаинн обобщения имеющихся результатов астрономическнх наблюдений. Во времена Кеплера задача, рассмотренная в § 27, не могла быть решена теоретически, так как не были открыты ни законы дниамнки, ни закон всемирного тяготения. В настоящее время киием атические законы Кеплера получаются как следствия законов диамики при заданной силе притяжения.

*Первый закон.* Каждая нз планет двнжется по эллипсу, в одном нз фокусов которого находнтся Солнце. Этот закон получен иами в процессе решения кеплеровой задачи в виде формулы (27.14). Необходимо только отметить, что с учетом двнжения Солнца фокус эллипса планеты совпадает не с центром Солица, а с центром масс системы.

*Второй закон.* Радиус-вектор планеты в равные промежутки времени описывает равные площади. Он получен намн в виде интеграла площадей (27.10).

*Третий закон.* Квадраты времен (периодов) обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит. Выведем его, используя формулу (27.15). Имеем:

$$k\gamma = \frac{C^2}{p},$$

или

$$\gamma m = -\frac{m'C^2}{p}.$$

Переходя к гравитационной постоянной и массе планеты, получим:

$$GmM = -\frac{mM}{m+M}\frac{C^2}{p}.$$

И окончательно:

$$G(m+M) = \frac{C^2}{p}.$$

Постоянную $C$ выразим через полуоси эллипса и период обращения планеты, а также вспомним значение параметра $p = \frac{b^2}{a}$:

$$G(m+M) = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}.$$

Здесь $a$ — полуось эллипса, по которому движется изображающая точка, так как принималось во внимание движение Солнца. Измеряются же полуоси орбит планет. Из рисунка (15.4) видно, что

$$a = a' + \frac{m}{M} a' = a'\left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

Так что для полуоси планеты имеем:

$$\frac{T^2}{a'^3} = \frac{4\pi^2 (M + m)^2}{GM^3} \approx \frac{4\pi^2}{GM}\left(1 + \frac{2m}{M}\right).$$

Третий закон Кеплера оказался приближенным: отношение $\frac{T^2}{a'^3}$ зависит от массы планеты $\left(\frac{m}{M}\right.$ — величина малая$\left.\right)$.

Пример 27.2. **Вывод закона всемирного тяготения с помощью законов Кеплера.** Записывая для неизвестной по модулю, но центральной силы в соответствии со вторым законом Кеплера основное уравнение динамики

$$F_r = m'(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)$$

и выполняя все преобразования, которые привели ранее к формуле (27,12), получим:

$$F_r = -m'c^2x^2\left(\frac{d^2x}{d\varphi^2} + x\right),$$

где $x = \frac{1}{r}$.

Используя первый закон Кеплера, т. е. зная уравнение орбиты

$$x = \frac{1 + e\cos(\varphi + \alpha)}{p},$$

произведем подстановку переменной $x$ в выражение для силы:

$$F_r = -\frac{m'C^2x^2}{p}.$$

Возвратимся к переменной $r$ и запишем выражение для силы в следующем виде:

$$F_r = -\frac{C^2 m}{pr^2}\,\frac{1}{1 + \frac{m}{M}} = \frac{C^2 M}{p^2 r^2}\,\frac{1}{1 + \frac{M}{m}}.$$

Введя обозначения:

$$\frac{C^2}{p^2}\,\frac{1}{1 + \frac{m}{M}} = \gamma_с, \quad \frac{C^2}{p^2}\,\frac{1}{1 + \frac{M}{m}} = \gamma_п,$$

имеем:

$$F_r = -\frac{\gamma_с m}{r^2} = \frac{\gamma_п M}{r^2},$$

откуда следует новое обозначение:

$$\frac{\gamma_с}{M} = \frac{\gamma_п}{m} = G,$$

и окончательно:

$$F_r = -G\frac{Mm}{r^2}, \text{ или } \vec{F} = -G\frac{Mm}{r_{1,2}}\,\frac{\vec{r}_{1,2}}{r_{1,2}}.$$

Осталось показать, что $G$, а вместе с ней $\gamma_с$ и $\gamma_п$ — постоянные величины. Для этого следует использовать третий закон Кеплера. Из определений величин $G$ и $\gamma$ следует:

$$G = \frac{C^2}{p(M + m)};$$

переходя к периоду и полуоси орбиты, как и в примере 27.1, получим:

$$G = \frac{4\pi a'^3 (M + m)^2}{T^2 M^3}.$$

Но эта формула по уточненному закону Кеплера (см. пример 27.1) связывает $a'$ и $T$ с константой $G$. Следовательно, и введенные нами сейчас величины $G$, $\gamma_c$ и $\gamma_n$ — константы.

Пример 27.3. **Движение точки в центрально-симметричном поле:** $U = \frac{kr^2}{2}$.

В соответствии с общими положениями движение будет совершаться по плоской траектории. Используем понятие эффективного потенциала:

$$U_e = \frac{kr^2}{2} + \frac{mC^2}{2r^2}.$$

График изображен на рисунке 27.3. Из условия (27.18) заключаем, что движение всегда финитное, причем минимальной энергии $E_m$ соответствует одно расстояние от центра, т. е. траектория будет окружностью. При $E > E_m$ движение ограничено снизу и сверху расстояниями $r_1$ и $r_2$.

Рис. 27.3.

Дифференциальные уравнения движения получим по методу Лагранжа, выбирая в качестве (обобщенных) координат декартовы координаты на плоскости движения с началом в центре поля. Функция Лагранжа имеет вид:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{k(x^2 + y^2)}{2},$$

а уравнения движения:

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad m\ddot{y} + ky = 0.$$

Такие уравнения многократно встречались в курсе. Они приводят к гармоническим колебаниям с частотой $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$:

$$x = a_1 \cos(\omega t + \alpha_1), \quad y = a_2 \cos(\omega t + \alpha_2).$$

Здесь $a_1$ и $a_2$ — постоянные интегрирования, дающие амплитуды колебаний. Они определяются через интеграл энергии по формулам

$$a_1 = \sqrt{\frac{2E_1}{k}}, \quad a_2 = \sqrt{\frac{2E_2}{k}},$$

где $E_1 = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$ и $E_2 = \frac{m\dot{y}^2}{2} + \frac{ky^2}{2}$ — составляющие энергии, относящиеся к движению по оси $Ox$ и $Oy$ (см. пример 12.10). Постоянные $\alpha_1$ и $\alpha_2$ — начальные фазы — определяют ориентацию эллипса относительно осей. Если начало отсчета времени выбрать так, что при $t = 0$ $x = 0$, а $y = a_2$, то $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_2 = 0$. В таком случае кинематические уравнения движения приводятся к виду

$$x = a_1 \sin \omega t, \quad y = a_2 \cos \omega t,$$

а траекторией движения является эллипс

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} = 1$$

с центром в центре поля и с осями, совпадающими с осями координат. Понятно, что при $a_1 = a_2$ получается окружность.

П р н м е р 27.4. **Расчет первой космической скорости.**

Пусть спутник уже выведеи иа орбиту и влняиие атмосферы иа его двнжеиие можио не учнтывать. Тогда на него будет действовать лишь сила тяготення

$$F = G\frac{Mm}{r^2},$$

где $M$ — масса Землн.

Будем счнтать Землю одиородным иевращающимся шаром радиуса $R$. В таком случае снлу тяготеиия выразим в внде $F = mg$, где $g$ — ускореиие свободного падеиня иа расстояннн $r$ от центра Земли. Обозиачим через $g_0$ ускорение свободиого падеиия иа поверхности Земли. Тогда нмеем:

$$G\frac{Mm}{r^2} = mg,\ G\frac{Mm}{R^2} = mg_0.$$

Из этнх равеиств найдем:

$$\gamma = GM = g_0R^2,\ g = g_0\frac{R^2}{r^2}.$$

Теперь определнм стацноиарную скорость $v_c$ двнжеиия спутинка по круговой орбнте нз условня, что иормальиое ускореиие в этом случае равно $g$:

$$\frac{v_c^2}{r} = g = g_0\frac{R^2}{r^2},\ v_c = \sqrt{g_0\frac{R^2}{r}}.$$

Скорость

$$v_c\big|_{r=R} = v_1 = \sqrt{g_0R} \approx 7{,}9\cdot10^3 \text{м/с}$$

называется *первой космической скоростью.* Это скорость кругового движеиня на уровие поверхиостн Земли (без учета сопротнвлення воздуха). Так как на некоторой высоте над поверхиостью Землн скорость кругового двнжеиня меиьше, то первая космическая скорость есть также скорость, которую иеобходимо сообщнть телу иа поверхностн Земли под иекоторым углом к ией, чтобы оио покннуло поверхность Земли.

Пернод обращеиия спутника по круговой орбите вычнсляется через первую космнческую скорость по формуле

$$T = \frac{2\pi r}{v_c} = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{r^3}{g_0}}.$$

П р и м е р 27.5. **Расчет второй космической скорости.**

Это мнннмальная скорость, которую иеобходимо сообщнть телу на Земле, чтобы (без учета сопротивлеиня воздуха) тело покниуло пределы поля тяготення Земли. Таким образом, это параболическая скорость и находить ее следует из нитеграла эиергнн кеплеровой задачн. Прн условии, что полная эиергня тела равна нулю, нмеем:

$$\frac{mv_п^2}{2} - \frac{\gamma m}{r} = 0.$$

Потеицнальиую эиергию представнм так:

$$\frac{\gamma m}{r} = mg_0\frac{R^2}{r}.$$

Интеграл энергнн прниимает внд:

$$\frac{mv_п^2}{2} - mg_0\frac{R^2}{r} = 0,$$

отсюда

$$v_п = \sqrt{2g_0\frac{R^2}{r}},\ v_п\big|_{r=R} = \sqrt{2g_0R} = 11{,}2\cdot10^3 \text{ м/с}.$$

Это вторая космнческая скорость.

Двнжение по эллиптнческой орбите осуществляется, еслн иачальная скорость больше $v_c$, но меньше $v_п$.

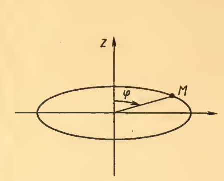


Рис. 27.4.

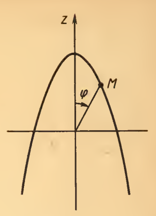


Рис. 27.5.

Пример 27.6. **Расчет скорости движения тела в разных точках орбиты.**

Орбитальная скорость в любой точке траектории движения в центральном поле тяготения рассчитывается в полярных координатах по формуле

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Однако использовать непосредственно формулу мы не можем, так как не нашли явной зависимости радиуса $r$ от времени $t$ (см. § 27).

Воспользуемся уже примененным ранее приемом и перейдем к дифференцированию по полярному углу $\varphi$ (см. вывод формулы (27.12)). Учтем также, что $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{r^2}$.

Получим:

$$v^2 = C^2\left[\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right].$$

Удобно ввести $x = \frac{1}{r}$, после чего получим:

$$v^2 = C^2\left[\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + x^2\right].$$

Теперь с помощью последнего выражения скорость может быть найдена, если известно уравнение траектории и ее параметры. Воспользовавшись уравнением траектории

$$x = \frac{1 + e\cos\varphi}{p},$$

имеем:

$$v^2 = \frac{C^2}{p^2}(1 + e^2 + 2e\cos\varphi).$$

Скорость выражена как функция полярного угла. Рассмотрим частные случаи движений. При эллиптическом движении постоянная площадей $C$ и период обращения тела связаны соотношениями

$$C = \frac{2\pi ab}{T} = \sqrt{\gamma p} = \sqrt{GMp},$$

где $a$ и $b$ — большая и малая полуоси эллипса; $p$ — параметр его; эксцентриситет $e < 1$. Выбор начала отсчета углов соответствует максимальной скорости (рис. 27.4).

Для верхней части эллипса при $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$ скорость падает до минимума.

Если тело движется по окружности, то $e = 0$, $a = b = r$, $p = r$ и $v = \frac{2\pi r}{T}$. Если тело движется по параболе, то $e = 1$, а скорость изменяется от максимальной до нуля при $\varphi = \pi$ (рис. 27.5):

$$v^2 = \frac{2C^2}{p}(1 + \cos\varphi).$$

При гиперболической траектории $\varphi = \pi$, $v \neq 0$, так как $e > 1$.

## § 28. Движение частиц в кулоновском поле силы отталкивания. Рассеяние $\alpha$-частиц

**28.1. Движение $\alpha$-частицы в поле неподвижного ядра атома.** Закон Кулона для взаимодействия двух точечных электрических зарядов, как известно, выражается формулой

$$\vec{F}_{1,2} = k\frac{q_1 q_2}{r_{1,2}^3}\vec{r}_{1,2}, \text{ где } k = 9\cdot 10^9\ \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}^2}$$

Здесь $\vec{F}_{1,2}$ — вектор силы, с которой заряд $q_1$ действует на заряд $q_2$, $\vec{r}_{1,2}$ — радиус-вектор, проведенный от первой частицы ко второй. По математической структуре закон Кулона аналогичен закону всемирного тяготения Ньютона. Но в отличие от тяготения кулоновское взаимодействие может быть как взаимным притяжением, так и взаимным отталкиванием.

Ядра атомов, в которых сосредоточена почти вся масса атома, заряжены положительно. Величина заряда ядра атома равна $Ze$, где $Z$ — атомный номер элемента, $e$ — модуль элементарного электрического заряда (заряда электрона). Исследование строения атома производится путем зондирования его пучком быстро движущихся заряженных частиц. При взаимодействии частиц с ядром траектория последних искривляется, происходит явление *рассеяния* частиц. Опытами такого рода английский физик Резерфорд в 1911 г. установил ядерную модель строения атома.

Рассмотрим задачу об определении траектории $\alpha$-частицы, движущейся в поле ядра атома. В этой задаче получаются формулы Резерфорда для рассеяния $\alpha$-частиц, представляющих собой ядра гелия и имеющих заряд $2e$. Массу $\alpha$-частицы обозначим $m$. Ядро рассеивающего атома имеет заряд $Ze$. Его массу считаем большой и движением ядра пренебрегаем. Потенциальная энергия $\alpha$-частицы в поле ядра будет $U = \frac{2kZe^2}{r}$, и при любых начальных условиях полная механическая энергия $\alpha$-частицы положительна, т. е. $E > 0$. Траекторией движения в данном случае является гипербола, фокус которой совпадает с положением рассеивающего ядра.

На рисунке 28.1 изображена траектория движения $\alpha$-частицы и показаны ее элементы. $AC$ — асимптота гиперболы, совпадающая с направлением начальной скорости $\alpha$-частицы, $DB$ — вторая асимп-

тота, определяющая направление скорости $\alpha$-частицы после рассеяния. Рассеивающее ядро находится в правом фокусе $F_1$. Угол $\vartheta$ между асимптотами — угол рассеяния, $a$ и $b$ — вещественная и мнимая полуоси гиперболы, $\varepsilon$ — расстояние от центра до фокуса гиперболы, связанное с полуосями гиперболы известным соотношением: $\varepsilon = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Расстояние от рассеивающего центра до асимптоты $F_1C = b$ есть наименьшее расстояние, на которое $\alpha$-частица пролетела бы от ядра при отсутствии отталкивания. Это расстояние называется прицельным расстоянием. Фактически наименьшее расстояние, на котором частица пролетает от ядра, есть расстояние от вершины гиперболы $E$ до фокуса $F_1$. Это расстояние обозначим через $q$, а через $\varphi$ — угол между асимптотой и действительной осью гиперболы $F_1F_2$.

Установим связь между параметрами системы $\alpha$-частица — ядро и углом расстояния $\vartheta$. В итоге угол рассеяния должен быть выражен через массу и скорость частицы, ее заряд и заряд ядра, прицельное расстояние $b$, характеризующее взаимное положение ядра и налетающей частицы.

Запишем интеграл энергии и интеграл площадей. Обозначим через $v$ начальную скорость $\alpha$-частицы, когда она находится на «бесконечно большом» расстоянии от ядра; $v_0$ — ее скорость в вершине гиперболы. Тогда интеграл энергии выразится равенством

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{2kZe^2}{q}.$$

Соответственно интеграл площадей запишется так: $mvb = mv_0q$.

Из интегралов движения можно получить уравнение, связывающее прицельное расстояние $b$ с углом отклонения $\vartheta$, но предварительно надо найти связь между $b$ и $q$. Заметим для этого, что прямоугольные треугольники $BOE$ и $OCE$ равны. Кроме того,

$$a = \varepsilon \cos\varphi,\ b = \varepsilon \sin\varphi,\ q = a + \varepsilon = (1 + \cos\varphi)\cdot\varepsilon.$$

Отсюда следует:

$$\frac{b}{q} = \frac{\sin\varphi}{1 + \cos\varphi}.$$

Интеграл площадей при использовании последнего равенства дает соотношение между скоростями:

$$\frac{v_0}{v} = \frac{b}{q} = \frac{\sin\varphi}{1 + \cos\varphi}.$$

Из интеграла энергии для отношения квадратов скоростей получаем выражение

$$\frac{v_0^2}{v^2} = 1 - \frac{2kZe^2}{q}\,\frac{2}{mv^2} = 1 - \frac{4kZe^2}{mv^2b}\,\frac{\sin\varphi}{1 + \cos\varphi}.$$

Возводя предыдущее равенство в квадрат и используя тригонометрическое тождество, имеем:

$$\frac{v_0^2}{v^2} = \frac{1 - \cos\varphi}{1 + \cos\varphi}.$$

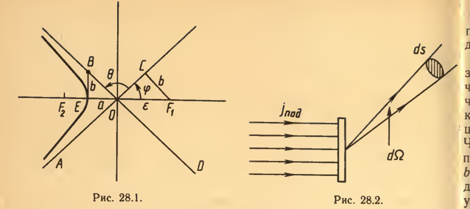



Рис. 28.1. Рис. 28.2.

Сравнение двух последних равенств дает:

$$\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi} = 1 - \frac{4kZe^2}{mv^2 b}\,\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}.$$

Простые преобразования приводят далее к равенству

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{mv^2}{2kZe^2}\,b.$$

Заменяя здесь угол $\varphi$ через $\vartheta$ на основании очевидного соотношения

$$\varphi = 90^\circ - \frac{\vartheta}{2},$$

приходим к результату:

$$b = \frac{2kZe^2}{mv^2}\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}, \qquad (28.1)$$

дающему ответ на поставленную задачу.

Однако в случае микрочастиц проследить за движением отдельной микрочастицы во всех деталях не удается, так что соотношение (28.1) непосредственно, как это можно сделать в случае макроскопических тел, не применяется. Мы используем его для расчета других величин, характеризующих рассеяние.

**28.2. Дифференциальное сечение рассеяния.** На рассеивающий центр направляется параллельный пучок $\alpha$-частиц, движущихся с одинаковой скоростью, и исследуется, каково число частиц, рассеянных под различными углами. Рассеяние характеризуется отношением числа частиц, рассеянных в данном элементе телесного угла $\Omega$, к числу частиц, падающих на единичную площадку, перпендикулярную скорости падающих частиц, в единицу времени, т. е. плотности потока падающих частиц (рис. 28.2). Это отношение имеет размерность площади и называется *эффективным дифференциальным сечением рассеяния:*

$$d\sigma = \frac{dN}{j_{\text{пад}}} = \frac{j_{\text{рас}}}{j_{\text{пад}}}\,dS = \frac{j_{\text{рас}}r^2}{j_{\text{пад}}}\,d\Omega. \qquad (28.2)$$

Сечение рассеяния не зависит от плотности потока пучка падающих частиц и полностью определяется характером взаимодействия частиц с рассеивающим центром.

Задача о рассеянии ставится теперь следующим образом: по заданным параметрам рассеивающего центра и рассеиваемых частиц требуется определить зависимость дифференциального сечения рассеяния от угла рассеяния и этих параметров. Для конкретной задачи рассеяния $\alpha$-частиц на ядрах атомов связь прицельного расстояния с углом рассеяния определена формулой (28.1). Чтобы угол рассеяния был заключен в промежутке от $\vartheta$ до $\vartheta + d\vartheta$, прицельное расстояние должно изменяться в пределах от $b$ до $b - db$. Проведя через рассеивающий центр прямую $BF$, совпадающую с направлением скорости падающего пучка частиц, можем утверждать, что угол рассеяния будет находиться в заданных пределах, если частица проходит через круговое кольцо, в плоскости перпендикулярной скорости частиц, с центром на прямой $BF$ и радиусами $b$ и $b - db$ (рис. 28.3). Обозначая плотность потока частиц в падающем пучке $j$, для числа частиц, проходящих через кольцо, получим выражение $dN = -j2\pi b db$, отсюда:

$$d\sigma = \frac{dN}{j} = -2\pi b db = -2\pi b \frac{db}{d\vartheta} d\vartheta .$$

Остается еще выразить $d\vartheta$ через элемент телесного угла $d\Omega$, численно равного площади, вырезаемой на сфере единичного радиуса двумя конусами с углами раствора $\vartheta$ и $\vartheta + d\vartheta$. Как пояснено на рисунке 28.4, эта площадь $d\Omega \doteq 2\pi \sin \vartheta d\vartheta$, откуда находим $d\vartheta$:

$$d\vartheta = \frac{d\Omega}{2\pi \sin \vartheta} .$$

Внося это значение $d\vartheta$ в числитель выражения для эффективного сечения, получаем выражение дифференциального сечения рассеяния:

$$d\sigma = -\frac{1}{\sin \vartheta} b \frac{db}{d\vartheta} d\Omega. \tag{28.3}$$

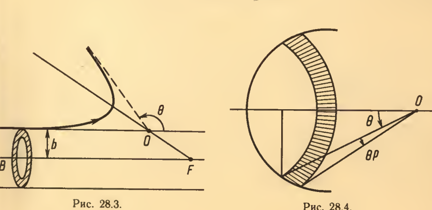



Рис. 28.3.

Рис. 28.4.

При рассеянии α-частиц зависимость прицельного расстояния от угла рассеяния дается формулой (28.1), и мы имеем:

$$\frac{db}{d\vartheta} = -\frac{2kZe^2}{mv^2}\,\frac{1}{2\sin^2\frac{\vartheta}{2}}.$$

Подставляя $b$ и $\frac{db}{d\vartheta}$ в (28.3), получаем окончательное выражение для эффективного сечения рассеяния α-частиц:

$$d\sigma = \left(\frac{kZe^2}{mv^2}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}}. \tag{28.4}$$

Эта формула широко известна и применяется в атомной и ядерной физике под названием формулы Резерфорда. Формула подтверждается экспериментально, что говорит о правомерности применения классической механики к данному случаю рассеяния. Однако это отнюдь не свидетельствует о применимости классической механики к микромиру вообще. Можно, например, решить задачу о движении электрона в кулоновском поле притяжения к ядру. При этом придем к результатам, вполне аналогичным полученным для движения планет в поле гравитационного притяжения Солнца. Электрон будет двигаться по эллипсу, в параметры которого вместо $G$ войдет константа $k$ (см. § 28). Но такие выводы, как будет показано далее, в части IV курса,—в резком противоречии с опытом. В микромире классическая механика имеет весьма ограниченное применение и заменяется квантовой механикой.

Пример 28.1. **Оценка размеров ядра атома.**

С помощью формулы Резерфорда проверяется предположение о точечности ядра атома. В опытах находится зависимость от угла рассеяния величины

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = f(\Omega).$$

Если она согласуется с теоретической, т. е.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{kZe^2}{mv^2}\right)\frac{1}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}},$$

то это и свидетельствует о малых размерах ядра.

Пример 28.2. **Измерение заряда ядра.**

С помощью формулы Резерфорда измеряется заряд ядер. Для двух химических элементов при рассеянии под одним и тем же углом $\vartheta$ имеем:

$$\frac{d\sigma_1}{d\sigma_2} = \frac{Z_1^2}{Z_2^2}.$$

Измеряя сечения рассеяния для ядра с известным зарядом и для ядра с неизвестным зарядом, рассчитываем неизвестный заряд по данной формуле. Это один из наиболее прямых способов измерения заряда ядра.

# ЧАСТЬ II. ОСНОВЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА

## Введение

Классическая механика охватывает широкий круг физических явлений — движение и взаимодействие макроскопических тел и их систем, обусловленные гравитационными и электромагнитными силами. Это движение планет Солнечной системы, движение окружающих нас на Земле тел вплоть до отдельных молекул, входящих в состав газа в обычных условиях. В классической механике введены важнейшие физические величины: масса, импульс, момент импульса, энергия, функции Лагранжа, Гамильтона, действие. Они применяются не только в механике, но и в других физических теориях.

Но классическая механика имеет хотя и очень широкую, но тем не менее ограниченную область применения, за пределами которой она должна быть заменена другими теориями. В частности, основополагающая модель классической механики — дальнодействие — есть явная идеализация реальных взаимодействий и приводит к результатам, соответствующим опытным данным, лишь тогда, когда скорость передачи взаимодействия можно считать бесконечно большой по сравнению со скоростью движения тел. Если это главное условие не соблюдено, из классической области движений и взаимодействий переходим в релятивистскую, где некоторые положения классической механики утрачивают силу.

В релятивистской области прежде всего необходимо учитывать конечный характер скорости передачи взаимодействий; в природе имеется предельная скорость передачи любых взаимодействий, движения любых тел и микрочастиц, распространения любых сигналов. Она равна скорости света $c$ в пустоте. Это принципиальное обстоятельство многое меняет в механической картине мира — в общих представлениях об окружающем мире, складывающихся на основе законов классической механики. Прежде всего пересматриваются некоторые кинематические понятия и соотношения, так как единый ход времени во всех системах отсчета, устанавливаемый с помощью мгновенно передающихся синхронизирующих сигналов (см. I, § 3)[1], оказывается в релятивистской области фикцией. Далее, видоизменяются выражения для ряда важнейших динамических величин — импульса, энергии и др. Устанавливаются новые соотношения, связывающие их между собой.

Важнейшим положением для выяснения особенностей движения и взаимодействия в релятивистской области является связь энергии и массы, откуда можно установить энергетический порог, до

[1] Ссылки на первую часть курса обозначаются римской цифрой I.

которого масса тел остается величиной аддитивной. Аддитивность массы или положение о том, что масса изолированной системы равна сумме масс входящих в нее материальных точек, выполняется лишь приближенно, до тех пор пока энергия взаимодействия не внесет заметного вклада в массу системы в соответствии с формулой $E = mc^2$. В этом же приближении справедлива и сама модель дальнодействия, согласно которой переносчик взаимодействия — физическое поле, обладающее энергией, импульсом и другими параметрами, в механическую систему не включается.

Но если энергия взаимодействия приближается или превышает указанный порог, картина движения коренным образом меняется: в результате взаимодействия могут исчезнуть одни и возникнуть другие материальные точки; на практике это те или иные микрочастицы. Таким образом, если в классической механике действует (необъявленный) закон сохранения индивидуальности материальной точки, или закон сохранения числа материальных точек в замкнутой системе, то в релятивистской области в общем случае он нарушается и говорить о дифференциальном уравнении движения материальной точки по траектории можно не всегда.

Наконец, если в исходной механической модели материальных точек, связанных действующими на расстоянии силами, ничего, кроме этих материальных точек, нет, а силовое поле рассматривается лишь как объект математический, как описание действующих на расстоянии сил, то в релятивистской области в исходную модель материальных объектов, кроме тел, включается физическое поле как переносчик взаимодействия. Поле наряду с телами описывается такими универсальными физическими характеристиками материи, как энергия, импульс, момент импульса. Таким образом, в релятивистской области появляется новый объект изучения — реальное физическое поле.

Таковы основные особенности релятивистской области движений и взаимодействий. Проникновение человека в данную область вместе с проникновением в область квантовых явлений привело к революционным изменениям в физической науке, происшедшим в конце XIX — начале XX в. Они тесно связаны с созданием специальной теории относительности (СТО) А. Эйнштейном в 1905 г. В нашем курсе рассматривается определенный круг вопросов релятивистской физики, условно объединенных во второй части.

Сначала рассматривается СТО — учение о пространстве и времени в инерциальных системах отсчета, об универсальных физических величинах (энергии, массе, импульсе, моменте), характеризующих изолированную свободную материальную точку. СТО является общефизической теорией, применяемой в различных разделах физики, в том числе и механике движения с высокими скоростями, которую называют релятивистской.

Если в классической механике основной объект — макроскопическое тело, заменяемое материальной точкой, то в релятивистской основной объект — элементарная частица, так как на практике именно элементарные частицы, а не макроскопические тела

движутся с релятивистскими скоростями. По этой причине вместо материальной точки говорят о частице.

Релятивистской динамике принадлежат соотношения между динамическими характеристиками свободной частицы и законы сохранения. Кроме того, здесь изучается хотя и не общий, но важный частный случай взаимодействия тел и полей, при котором индивидуальность частиц — масса покоя — сохраняется, а в результате взаимодействия при движении изменяются импульс и энергия, положение в пространстве. Этот случай называется квазирелятивистским и укладывается при внесении релятивистских поправок в рамки основной задачи механики. Поэтому в курсе изучается *релятивистское обобщение* основного уравнения динамики. Релятивистскими обобщениями определяются в данном разделе курса функции Лагранжа, Гамильтона.

Что касается предельно релятивистского объекта — физического поля, в частности фундаментального электромагнитного поля, то оно изучается в III части курса.

При изложении классической механики подчеркивалась мысль о ее основополагающем значении для всей физики, так как в ней рассматриваются вопросы о пространстве, времени, механическом движении, неотделимом от других форм движения материи. Не в меньшей, а в большей степени это относится к релятивистской механике, ибо в ней по существу уточняются все исходные понятия классической, а она сама выступает как предельный случай релятивистской (при $c = \infty$).

## ГЛАВА I. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ (СТО) И КИНЕМАТИКА ДВИЖЕНИЙ С ВЫСОКИМИ СКОРОСТЯМИ

### § 1. Постулаты Эйнштейна. Преобразования Лоренца

**1.1 Проблема абсолютно неподвижной (привилегированной) системы отсчета.** Принцип относительности Галилея провозглашает полное равноправие или эквивалентность всех инерциальных систем отсчета (ИСО) по отношению к механическим явлениям. Это означает, что, находясь в любой ИСО, нельзя установить с помощью механических явлений скорость ее движения относительно некоторой абсолютно неподвижной исходной или, как говорят, *привилегированной системы,* если последняя и существует. В самом деле, в формуле сложения скоростей

$$\vec{v}_{а} = \vec{v}_{п} + \vec{v}_{от},$$

деление скоростей на абсолютную $\vec{v}_{а}$ и относительную $\vec{v}_{от}$ имеет чисто условный характер и связано с тем, что одну из инерциальных систем отсчета мы выбираем в качестве неподвижной, тогда другая система движется в первой с постоянной скоростью $\vec{v}_{п}$, $\vec{V}$. Но с тем же основанием в качестве неподвижной системы можно выбрать вторую, а движущейся — первую.

Целесообразио поэтому не употреблять иазваиня неподвнжиая и подвнжная системы, заменив их другими: иештрихованная снстема (или $K$) и штриховаииая система (или $K'$). Формула сложения скоростей в таком случае приобретает внд:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}, \qquad (1.1)$$

где $\vec{V}$ — скорость движеиия штриховаииой системы в иештрнхованной.

Наблюдатель в некоторой системе отсчета $K$ может с помощью киематических измереиий иайти скорость $\vec{V}$ отиосительиого движеиия любой другой системы $K'$, н только. А ответить на вопрос, движется или иеподвнжиа его система отсчета, с помощью таких измереинй иельзя, так как речь идет об *относительном движении.*

В силу принципа относительиости Галилея иельзя сделать такого заключеиия и с помощью нзучеиия дниамики механичецкнх явлеиий в иерциальной системе: движеиие системы ие влияет иа мехаиические процессы, происходящие в ней.

Постаиовка вопроса об абсолютном двнжении или покое инерцнальной системы в мехаиике бессодержательиа, так как привилегироваииой системы здесь просто иет — все инерциальиые системы равиоправны. Одиако создатель классической механики И. Ньютон считал, что движение или покой могут иметь место в абсолютиом простраистве, существующем безотносительно к чему-либо, само по себе. Он допускал возможиость обиаружения такого движеиия. Взгляды на абсолютное пространство как исходную привилегироваииую систему отсчета продержались до начала нашего века, пока не были детально изучены электромагиитиые явлеиия и не было устаиовлено, что принцип относительности распространяется не только на мехаиические, но и электромагиитные явлення. Стали возможиыми некоторые опыты по обиаружению абсолютиого двнжения системы отсчета путем иаблюдеиия за электромагнитными явлениями, ио все они дали так называемый *отрицательный результат*: двнжение системы иаблюдателя относительно нсходной иеподвижиой системы — абсолютного простраиства — обиаружить не удалось. Положеиие о равноправии инерциальиых систем было распространено на все физические явления, происходящие в иих. Утвердился прнцип отиосительности для всех физических явлений, а абсолютное пространство было признано фикцией.

**1.2. Опыт Майкельсона. Постулаты Эйнштейна.** Из экспериментов, лежащнх в осиове СТО, рассмотрим один, получивший иаибольшую известность как исторически первый и физически иаглядный. Ои был осуществлеи амернканским физиком Майкельсоном в 1881 г. и должеи был устаиовить влиянне движения Земли по орбите на скорость распространения света в системе отсчета, связанной с Землей. На рисунке 1.1 схематически изображен ход лучей в интерферометре, построеним Майкельсоиом для осуществления опыта. Полупрозрачное зеркало $A$ разделяет моиохроматнческий пучок света от источника $S$ иа два пучка, распростраияющиеся во взаимно перпендикуляриых иаправлениях. После от-

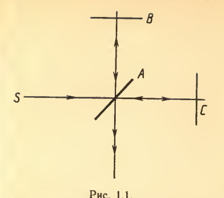


Рис. 1.1.

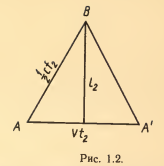


Рис. 1.2.

ражения от зеркал $B$ и $C$ эти пучки вновь соединяются и результат интерференции пучков наблюдается в фокальной плоскости зрительной трубы. Положение полос интерференции будет определяться разностью времени, затрачиваемой пучками на прохождение плеч интерферометра по $ABA$ и $ACA$. Пусть плечо $AC$ совпадает по направлению со скоростью движения Земли по орбите. Подсчитаем, какое время затрачивает свет на прохождение этого плеча туда и обратно, исходя из предположения, что Земля движется в абсолютном пространстве со скоростью $v$, а свет — со скоростью $c$. Время достижения светом зеркала $C$ за счет «убегания» зеркала от пучка в соответствии с формулой (1.1) увеличивается:

$$t_{\text{в}} = \frac{l_1 + vt_{\text{в}}}{c},$$

откуда

$$t_{\text{в}} = \frac{l_1}{c - v}.$$

Точно так же время возвращения светового сигнала к зеркалу $A$ будет уменьшаться за счет «набегания» этого зеркала:

$$t_{\text{н}} = \frac{l_1}{c + v}.$$

Обозначая через $t_1$ время, затраченное на прохождение $ACA$, имеем:

$$t_1 = \frac{l_1}{c - v} + \frac{l_1}{c + v} = \frac{2l_1}{c}\,\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Подсчет времени, которое затрачивается вторым пучком на прохождение пути $ABA$, поясняется на рисунке 1.2. Если это время равно $t_2$, то зеркало $A$ успевает переместиться на расстояние $vt_2$ и траектория пучка в неподвижной системе оказывается совпадающей со сторонами равнобедренного треугольника $ABA'$. По теореме Пифагора получаем:

$$c^2t_2^2 = 4l_2^2 + v^2t_2^2,\; t_2 = \frac{2l_2}{c}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Нас интересует разность времен прохождения светом плеч интерферометра. Она выражается формулой:

$$t_1 - t_2 = \frac{2}{c}\left(\frac{l_1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{l_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right). \qquad (а)$$

Если интерферометр повернуть на 90°, то плечи поменяются местами и новая разность времени окажется равной:

$$t_1' - t_2' = \frac{2}{c}\left(\frac{l_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{l_2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right). \qquad (б)$$

Разности времени прохождения световым лучом плеч $AC$ и $AB$ неодинаковы при разных положениях интерферометра, и, следовательно, при повороте прибора должно произойти смещение полос интерференции. Смещение будет определяться величиной

$$\vartheta = (t_1 - t_2) - (t_1' - t_2') = \frac{2}{c}(l_1 + l_2)\left(\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right).$$

Приняв во внимание неравенство $v \ll c$, приближенно имеем:

$$\vartheta = \frac{l_1 + l_2}{c}\,\frac{v^2}{c^2}.$$

Если $\vartheta$ окажется равным полупериоду светового колебания $\tau = \frac{\lambda}{2c}$, то смещение будет равно ширине одной полосы (соответствующей разности фаз $\pi$). Отсюда получается — для $\lambda = 5\cdot10^{-5}$ см, $v = 3\cdot10^4$ м/с, $c = 3\cdot10^8$ м/с — смещение на ширину одной полосы при $l_1 + l_2 = 50$ м. В первом варианте установки ожидалось максимальное смещение на одну треть ширины полосы, *но никакого смещения не было обнаружено.*

В последующие годы Майкельсон повторял опыт со все более чувствительной и точной аппаратурой. Но смещения интерференционных полос при повороте прибора в опытах не получилось. Подобные опыты ставили неоднократно другие исследователи. Ставились и чисто электромагнитные опыты для обнаружения влияния движения Земли по орбите на электромагнитное поле. Эти опыты неизменно давали *отрицательный* результат.

В исторический период, предшествовавший созданию теории относительности, как уже говорилось, предполагалось, что существует привилегированная абсолютно неподвижная система отсчета, связанная с самим пространством. Абсолютно неподвижное пространство именовалось также *светоносным эфиром*. Это гипотетическая среда, в которой разыгрываются электромагнитные явления, распространяется свет. Истолкование отрицательного результата опыта Майкельсона с точки зрения основополагающих положений классической

механики вызывает серьезные затруднения. Ведь в соответствии с этим результатом скорость света не зависит от скорости движения системы отсчета.

Делались неоднократные попытки ввести специальные гипотезы для объяснения отрицательного результата опыта Майкельсона без отказа от предположения о существовании неподвижного электромагнитного эфира. Все выдвигаемые гипотезы, какими бы остроумными они ни были, в свою очередь приводили к новым трудностям и противоречиям и свидетельствовали лишь о беспомощности классической физики в разрешении проблемы. Необходим был принципиально новый подход к разрешению проблемы о привилегированной неподвижной системе отсчета.

Такой подход осуществил А. Эйнштейн в 1905 г., выдвинув предположение, которое он называет принципом относительности: «...не только в механике, но и в электродинамике никакие свойства явлений не соответствуют понятию абсолютного покоя и даже, более того, ...для всех координатных систем, для которых справедливы уравнения механики, справедливы те же самые электродинамические и оптические законы...» Кроме принципа относительности, Эйнштейн вводит добавочное допущение: «...свет в пустоте всегда распространяется с определенной скоростью, не зависящей от состояния движения излучающего тела»[1].

По Эйнштейну, нужно не объяснять со старых позиций, почему «не удается» опыт Майкельсона и подобные ему опыты, а рассматривать его результат в качестве подтверждения принципиальных положений — постулатов новой теории. Для удобства дальнейших применений сформулируем их отдельно:

I. Принцип относительности Эйнштейна. *Любое физическое явление протекает одинаково во всех инерциальных системах отсчета.* Иными словами, любой закон природы одинаково справедлив во всех инерциальных системах. Если в одной инерциальной системе некоторый физический закон выражен математической формулой, то вид ее должен быть тем же самым во всех других инерциальных системах. Это значит, что законы физики должны быть инвариантны по отношению к переходам между инерциальными системами.

II. Принцип постоянства скорости света. *Во всех инерциальных системах по всем направлениям скорость распространения света в пустоте имеет одно и то же значение, равное с.* Расшифруем принцип. Равноправие всех физических систем позволяет рассматривать некоторый источник света в любой из них. В одной системе источник покоится, во всех остальных — движется. По принципу постоянства скорости света получается, что движение источника в инерциальной системе не оказывает влияния на скорость испускаемого им света.

---

[1] Эйнштейн А. К электродинамике движущихся тел // Собрание научных трудов.— М.: Наука, 1965.— Т. I.— С. 7. Далее из оригинального текста статьи следует, что речь идет об одних и тех же электродинамических и оптических законах, об одинаковой их форме во всех инерциальных системах.

Принцип постоянства скорости света находится в определенной связи с принципом относительности. Если допустить, что в природе существует предельная скорость движения материальных объектов, и распространить принцип относительности на все физические явления, то эта предельная скорость будет одинаковой во всех инерциальных системах. В противном случае нарушается их равноправие, эквивалентность, вытекающая из принципа относительности. Оказывается, что предельная скорость равна $c$. Ею, в частности, обладают электромагнитные волны, свет. Но подчеркнем, что принцип постоянства скорости света не является просто следствием принципа относительности: только *предельная* скорость будет одной и той же во всех инерциальных системах. По этой причине в качестве второго постулата можно выбрать *принцип существования предельной скорости распространения взаимодействий, равной $c$.*

Два рассмотренных выше принципа лежат в основе специальной теории относительности (СТО), созданной А. Эйнштейном в результате критического анализа классических представлений о пространстве и времени в связи с изучением электромагнитных явлений в движущихся системах. В настоящее время СТО является общефизической теорией и основанием ряда современных физических теорий. В ней фундаментальную роль играет константа $c$, равная скорости света в вакууме. Приведем ее современное значение: $c = 299\,972\,458 \pm 1{,}2$ м/с.

**Историческая справка.** Во избежание искажения исторической последовательности событий заметим, что опыт Майкельсона не оказал решающего влияния на появление основополагающей работы Эйнштейна «К электродинамике движущихся тел», хотя автор и упоминает о неудавшихся попытках обнаружить движение Земли относительно светоносной среды. Однако это ни в коей мере не умаляет роли данного опыта в истории развития современной физики. Эта роль многократно подчеркивалась самим Эйнштейном.

Среди более поздних опытов отметим опыт Бонч-Бруевича 1956 г. с внеземным движущимся источником света относительно Земли. Опыт показал, что скорость света не зависит от скорости движения источника. С развитием науки и техники стало возможным обнаруживать очень малые изменения скорости света. Но и новые опыты (в частности, опыты Кантора 1962—1964 гг.) дали отрицательный результат. Опыты, проведенные в 60-е гг., и современные астрономические измерения установили независимость скорости света от скорости движения источника с очень высокой точностью. В настоящее время второй постулат СТО надежно подтвержден экспериментально.

**1.3. Преобразования Лоренца.** Из аксиомы о постоянстве и предельном характере скорости света $c$ следует, что преобразования Галилея неприменимы к скорости движения, равной $c$. При достаточно высоких скоростях движения тел (и систем отсчета) они должны быть заменены другими преобразованиями. Такие преобразования были найдены Лоренцем еще до появления теории относительности, и хотя их толкование в СТО изменилось, они носят название преобразований Лоренца.

В релятивистской области движений — области высоких скоростей — сохраняется модель пространства и времени, рассмотренная ранее в классической механике (I, § 1). Согласно модели реальное пространство *трехмерно и евклидово,* оно *непрерывно, однородно, изотропно.* Время *одномерно, непрерывно, однородно и однонаправ-*

*ленно.* Новыми являются преобразования координат и времени при переходе между двумя инерциальными системами, так как они должны удовлетворять теперь принципу постоянства скорости света, чего не было в классической механике. Выведем преобразования Лоренца, ограничившись выбором направления осей координат, представленным на рисунке 1.3. В силу изотропности пространства этот выбор не уменьшает общности рассмотрения вопроса, так как все направления осей равноправны. Когда направление скорости $\vec{v}$ в некоторой системе определено, с ним и совмещаем любые оси, например $Ox$, $O'x'$. Такой выбор целесообразен как выбор, упрощающий формулы.

Далее предположим, что в обеих системах установлена координатная сетка при помощи эквивалентных эталонов длины, а время измеряется одинаковыми часами. Физическое равноправие систем допускает такую возможность. Часы, находящиеся в началах координат, в момент совпадения начал в пространстве поставлены на одинаковое время: $t = t' = 0$. Штрихованная система движется в нештрихованной со скоростью $v_x = V$, $v_y = 0$, $v_z = 0$. Нештрихованная в штрихованной — со скоростью $v'_x = -V$, $v'_y = 0$, $v'_z = 0$. Различие знака у проекции скорости движения систем вдоль оси $Ox$ — единственное математическое отличие систем друг от друга.

Если в классической механике полагали, что скорость синхронизирующих часы сигналов *бесконечно велика,* то теперь это неправомерно, ведь утверждается наличие *предельной скорости,* что и должно быть принято в расчет при синхронизации часов. Часы в обеих системах синхронизированы с помощью сигналов, распространяющихся с конечной скоростью $c$: по сигналу времени $t = 0$ в системе $K$ часы на расстоянии $r$ от начала поставлены на время $t = \frac{r}{c}$, а часы в системе $K'$ — на $t' = \frac{r'}{c}$.

Теперь абсолютное совпадение моментов времени для какого-либо события в разных системах, как это было в случае преобразований Галилея (I, § 3), не имеет места. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим в качестве события попадание светового сигнала, испущенного из совпадающих начал систем $K$ и $K'$ в нулевой момент времени в точку $A$, покоящуюся в системе $K$, в которой сигнал прошел расстояние $r'$ и попал в точку $A$ в момент $t = \frac{r}{c}$. В системе $K'$ точка $A$ двигалась, и здесь сигнал прошел другое (меньшее) расстояние $r'$ (рис. 1.4), так что свет пришел в точку $A$ в момент $t' = \frac{r'}{c}$. Это значит, что для одного и того же события по синхронизированным часам $t \neq t'$. Поэтому мы не можем заранее считать, что время преобразуется тождественно, т. е. что $t = t'$, кроме нулевого момента в начале координат. Следует искать формулы преобразования координат и времени.

Искомые формулы преобразования должны быть *линейными,* так как пространство и время *однородны;* началом координат и отсчета

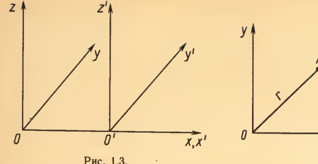



Рис. 1.3.

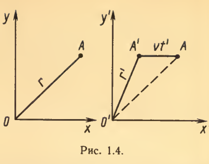



Рис. 1.4.

времени в обеих системах может служить любая точка. Найдем сначала, как будут преобразовываться координаты $y$ и $z$, перпендикулярные направлению относительной скорости движения систем. В соответствии со сделанными предположениями относительно систем координат наиболее общей линейной связью между штрихованными и нештрихованными координатами является связь

$$y' = \varepsilon y,\ z' = \varepsilon z,$$

причем взят один и тот же коэффициент $\varepsilon$ в силу *изотропности* пространства. Коэффициент $\varepsilon$ имеет простой механический смысл: он указывает, во сколько раз возрастает длина отрезка, покоящегося в первой системе, расположенного вдоль оси $Oy$ или $Oz$, при его измерении во второй системе (штрихованной). Относительно этой системы отрезок движется в направлении $O'x'$ со скоростью $V$. Так как обе системы равноправны, то обратные преобразования будут иметь точно такой же вид: $y = \varepsilon y'$, $z = \varepsilon z'$.

Но так как

$$y = \frac{1}{\varepsilon} y',\ z = \frac{1}{\varepsilon} z',$$

то $\frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$.

Приходим к результату, что указанные координаты преобразуются тождественно: $y' = y$, $z' = z$. Знак «минус» опущен, так как он говорит о выборе противоположного направления штрихованных осей, что интереса не представляет.

Для нахождения закона преобразования координаты $x$ заметим, что положение начала координат штрихованной системы для любого момента времени в системах задается так: $x' = 0$, $x = Vt$. Соответственно для начала координат нештрихованной системы $x = 0$, $x' = -Vt'$. Отсюда однородное линейное преобразование, связывающее координаты $x$ и $x'$, должно иметь следующий вид:

$$x' = \gamma(x - Vt),\ x = \gamma(x' + Vt').$$

Коэффициент пропорциональности $\gamma$ в прямом и обратном преобразованиях должен быть одинаков в силу *равноправия* систем. Для определения величины этого коэффициента используем принцип по-

стояиства скорости распространения света. Пусть в момент времени $t = t' = 0$ из совпадающих начал координат посылается световой сигнал, который фиксируется в обеих системах как вспышка на экране. Этому событию в первой системе соответствует значение координат $x = ct$, а во второй $x' = ct'$. Подставляя данные значения координат в предыдущие формулы преобразования, получаем:

$$ct' = \gamma(c - V)\,t,\ ct = \gamma\,(c + V)\,t'.$$

После перемножения равенств и сокращения на общий множитель легко получаем:

$$\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Искомый закон преобразования координаты $x$ получен:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},\ x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Для нахождения закона преобразования времени решаем второе уравнение относительно $t'$ и подставляем сюда значение $x'$ из первой формулы. После несложных алгебраических преобразований приходим к искомому результату. Лоренцевы преобразования таковы:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},\ y' = y,\ z' = z,\ t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \qquad (1.2)$$

Обратные преобразования получим, обращая знак у скорости $V$:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},\ y = y',\ z = z',\ t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \qquad (1.3)$$

Знак «плюс» выбран для $\gamma$ по следующим соображениям. Знак «минус» для координаты означал бы просто другой выбор направления оси $Ox$, а в формуле для преобразования времени $t$ — обратный ход времени в штрихованной системе. Но время однонаправленно, инерциальных систем с обратным ходом времени не существует, поэтому смысла знак «минус» не имеет. (Однако в микромире «минус» находит толкование для античастиц.)

Полученные преобразования координат Лоренца (1.2) и (1.3) играют фундаментальную роль в СТО и всей релятивистской физике, ибо они в аналитической форме выражают принципы Эйнштейна. Что же касается используемых в классической механике преобразований Галилея (I, § 3), то они являются предельным случаем этих более общих преобразований Лоренца. Формулы (1.2) при $c = \infty$ (т. е. $V \ll c$) переходят в классические — галилеевы:

$$x' = x - Vt,\ y' = y,\ z' = z,\ t' = t.$$

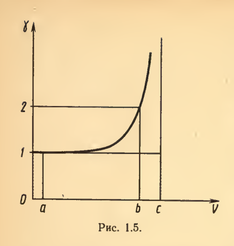


Рис. 1.5.

Если бы существовали бесконечно быстрые сигналы, то их можно было бы использовать для регулировки часов и преобразовывать время тождественно. Но бесконечно быстрых сигналов в природе нет, и осуществить такую синхронизацию часов невозможно. Однако в подавляющем большинстве случаев, с которыми сталкивается механика, отношение $\frac{V}{c} = \beta$ — очень малая величина; в приближении преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея. Поэтому последние достаточно правильно отражают пространственно-временные соотношения для медленных движений по сравнению со скоростью распространения света. Для движений, у которых скорость сравнима со скоростью света, преобразования Галилея, а также некоторые законы ньютоновой механики становятся неверными. Соотношения между инерциальными системами отсчета в этом случае должны определяться формулами преобразований Лоренца.

Итак, условие $V \ll c$ качественно определяет границу между классической и релятивистской областями.

Построим график величины $\gamma$, входящей в формулы (1.2) и (1.3). Область скоростей, в которой график в пределах доступной или интересующей нас точности не отличается от прямой, будет классической (для механики макротел условно, например $v < 100$ км/с), далее следует релятивистская область. В ряде случаев выделяют также квазирелятивистскую область ($ab$), в которой величина $\gamma$ отлична от *1*, но не превышает *2* (рис. 1.5). В таком случае релятивистская область лежит за точкой $b$.

Переход формул из одной теории к формулам другой, менее общей, но применяющейся в качестве фундаментальной для широкого круга явлений, связывают с *принципом соответствия* между физическими теориями. *Согласно этому принципу более общие теории содержат менее общие в качестве своих предельных случаев, дающих простые универсальные модели для описания физических явлений в соответствующих областях.* Так, классическая механика содержится в релятивистской, но имеет самостоятельное значение в своей предметной области.

### § 2. Основные кинематические следствия преобразований Лоренца

**2.1. Длины движущихся отрезков и промежутки времени по движущимся часам.** Остановимся на важнейших выводах, которые вытекают из преобразований Лоренца и уточняют кинематические

понятия классической механики. Отсутствие в природе бесконечно быстрых сигналов заставляет критически проанализировать понятия длины или расстояния между двумя точками, в которых произошли некоторые события, и промежутка времени между моментами двух событий в различных инерциальных системах. Прежде всего напомним, что элементарным *механическим событием* мы называем попадание материальной точки в точку пространства с координатами $x$, $y$, $z$ в момент времени $t$. Событие инвариантно по отношению ко всем системам отсчета, т. е. если оно происходит в какой-то одной из них, то происходит и во всех других, но координаты и момент времени его, разумеется, другие.

Понятие события распространяется на все физические явления. Под ним следует понимать любое физическое явление, происходящее в данной точке пространства в данный момент времени. Оно происходит во всех системах отсчета. В качестве примера события приведем вспышку света, выстрел, распад элементарной частицы. Понятие точечного события является абстракцией; реальное событие всегда имеет некоторую пространственную и временную протяженность и может рассматриваться как точечное только приближенно. Любой физический процесс есть некоторая последовательность точечных событий.

Пересмотр очевидных классических представлений о длине отрезков и продолжительности процессов как величин абсолютных связан с необходимостью уточнения *способа измерения* расстояний и времени, приведения их в соответствие с физически осуществимыми способами измерения данных величин. Именно это и сделано в СТО.

Рассмотрим вопрос об измерениях подробнее. Экспериментаторы располагают в каждой инерциальной системе следующим: для пространственных измерений имеются эталоны — твердые стержни, а для измерений времени — неограниченное число часов, идущих совершенно одинаково. При этом эквивалентность пространственных и временных эталонов распространяется в силу принципа относительности на все инерциальные системы. Опираясь на постулаты о геометрических свойствах пространства (непрерывность, евклидовость и т. д.), в любой ИСО можно осуществить с помощью измерений длин и углов *определение координат каждой точки* (измерение длин осуществляется для неподвижных отрезков наложением масштаба).

Ход времени во всех ИСО согласно постулату о равноправии систем эквивалентен, т. е. время во всех системах непрерывно, однонаправленно и т. д.

Пусть в каждой точке пространства находятся часы. По этим часам и должен определяться момент времени события, происходящего в данной точке. Для того чтобы это время было не местным, а общим для всей системы, необходимо *синхронизировать* ход часов. Здесь возможны два способа. Первый: собрать часы в одну точку, установить на них одинаковые показания и затем распределить их по всей системе. При таком способе предполагается, что перенос часов (сообщение им ускорения) не оказывает влияния на их ход. Каких-либо научных оснований для такой гипотезы не имеется, и такой способ синхронизации следует забраковать. Второй способ, не требующий введения новых гипотез, состоит в посылке сигналов точного времени. (Как известно, этот способ является основным и в практической службе времени.) На основе опыта в принципе постоянства скорости света утверждается, что световые (электромагнитные) сигналы по всем направлениям в инерциальной системе распространяются с одинаковой скоростью. Синхронизированные показания всех часов системы получим, если в момент $t = 0$ из начала координат пошлем сигнал, а в момент получения сигнала на любых часах поставим время $t_1 = \frac{r}{c}$, где $r$ — расстояние часов от начала координат. (Так мы уже поступали в предыдущем па-

раграфе.) Таким образом можно установить время для данной системы отсчета и получить возможность событию однозначно сопоставить четыре числа $x$, $y$, $z$, $t$, определяющие его место и время.

Длины неподвижных отрезков измеряются *наложением* эталонного масштаба. Для движущегося отрезка измерение методом наложения не годится, так как придется вводить гипотезу о независимости длины эталона от скорости движения, являющуюся произвольной. Для определения длины движущегося отрезка достаточно определить *положение его концов для одного и того же момента времени.* Расстояние между этими точками и является длиной движущегося отрезка в системе, где концы отрезка фиксировались. При таком способе измерения не возникает необходимости вводить какие-либо дополнительные допущения. Вышеописанные способы определения координат и времени, а также измерение длины движущегося отрезка находятся в полном соответствии с законами физики и практикой измерений этих величин.

Определим теперь длину отрезка в двух системах: в одной он движется, а в другой покоится. Пусть отрезок длиной $l$ покоится вдоль оси $Ox$ нештрихованной системы. Координаты его начала и конца для любого момента времени в этой системе будут $x_1$, $x_2 = x_1 + l$. Для определения длины отрезка в штрихованной системе, относительно которой он движется со скоростью $-V$, найдем координаты $x_1'$ и $x_2'$ для одного и того же момента времени. Для этой цели пользуемся формулами (1.3). Полагаем в первой из них $t' = 0$ и находим:

$$x_1' = x_1\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}},$$

$$x_2' = (x_1 + l)\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Отсюда следует, что

$$l' = l\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \qquad (2.1)$$

Длина отрезка сокращается пропорционально множителю

$$\sqrt{1 - \frac{V}{c^2}}.$$

Итак, пространственные расстояния *не являются инвариантами* преобразований Лоренца, они изменяются при переходе от одной инерциальной системы к другой. Равноправие обеих систем выражается здесь в том, что измерение длины отрезка, покоящегося вдоль оси $O'x'$ штрихованной системы, в нештрихованной системе дает тот же результат — отрезок оказывается укороченным пропорционально множителю $\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$.

Рассмотрим, как будут восприниматься промежутки времени между двумя событиями с точки зрения различных ИСО. Определим в нештрихованной системе, какую величину имеет промежуток вре-

мени между двумя событиями, происходящими в одной и той же точке $x'$ штрихованной системы. Для первого события часы, покоящиеся в точке $x'$ штрихованной системы, показывают $t'_1$, а для второго $t'_2$. Используя последнюю формулу (1.3), получаем:

$$t_1 = \frac{t'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad t_2 = \frac{t'_2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Отсюда следует, что

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \qquad (2.2)$$

Промежутки времени тоже приобретают относительный характер. Об этом образно говорят, как об изменении хода часов при их движении: движущиеся часы идут медленнее, нежели покоящиеся. Замедление хода часов происходит пропорционально множителю $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$. Но суть дела не в том, что движение системы влияет на ход процессов, происходящих в ней, и на ход часов, а в относительном характере промежутка времени: *продолжительность процесса, или промежуток времени между двумя событиями, наименьший в той системе, в которой события происходят в одной и той же точке пространства.* Этот промежуток называется *собственным временем* $\Delta\tau$:

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \qquad (2.3)$$

Промежуток времени $\Delta t$ между этими же событиями во всех других системах, где они происходят в разных точках пространства (вместе с движущимся телом), *всегда больше собственного времени.*

Понятие одновременности двух событий, имевшее в классической физике абсолютный характер, на самом деле таковым не является. Если в какой-либо инерциальной системе события одновременны, то в другой, движущейся относительно первой, им соответствуют разные моменты времени. Об этом уже говорилось ранее, а сейчас неодновременность событий вытекает из формул преобразования времени. Пусть два события были одновременны в нештрихованной системе, т. е. $t_2 = t_1$. По формулам (1.3) имеем:

$$\frac{t'_2 - t'_1 + \frac{V}{c^2}(x'_2 - x'_1)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = 0,$$

откуда

$$\Delta t' = \frac{V}{c^2}(x'_1 - x'_2).$$

Кроме того, с точки зрения первой системы часы во второй идут несинхронно: показания часов, как это видно из (1.3), зависят от их координаты $x'$.

Современная физика получила прямое экспериментальное подтверждение изменения промежутков времени в зависимости от скорости движения. Продолжительность жизни элементарных частиц — мюонов зависит от их скорости, и эта зависимость имеет ясно выраженный релятивистский характер, т. е. соответствует формулам (2.3). Существуют и другие подтверждения эффекта, в частности прямые эксперименты с движущимися точными часами.

**2.2. Закон сложения скоростей.** Пусть некоторая материальная точка движется и наблюдается в штрихованной и нештрихованной системах. Скорость ее в проекциях на оси выражается следующим образом:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'},\ v'_y = \frac{dy'}{dt'},\ v'_z = \frac{dz'}{dt'};\ v_x = \frac{dx}{dt},\ v_y = \frac{dy}{dt},\ v_z = \frac{dz}{dt}.$$

С помощью преобразований Лоренца легко находим связь между скоростями в разных системах:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}},\ v_y = \frac{v'_y\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}},\ v_z = \frac{v'_z\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}. \quad (2.4)$$

Для светового сигнала, например, распространяющегося по оси $Ox$, получим:

$$U = \frac{c + V}{1 + \frac{cV}{c^2}} = c,$$

что согласуется, конечно, с принципом постоянства скорости света.

Классическая формула скоростей (1.1), вытекающая из преобразований Галилея, является частным случаем релятивистских формул (2.4) при $c = \infty$.

**2.3. Пространственно-временной интервал.** Как пояснено в предыдущем параграфе, промежутки времени и расстояния не являются инвариантами преобразований Лоренца, они имеют разные значения в различных инерциальных системах отсчета. Вместо двух этих величин, являющихся абсолютными в классической физике и носящих относительный характер в СТО, важнейшим инвариантом в теории относительности выступает величина, называемая пространственно-временным интервалом.

Существование инварианта самым непосредственным образом вытекает из принципа постоянства скорости света. Пусть в момент $t = t' = 0$ в общем начале координат производится световая вспышка и в каждой системе в силу принципов относительности и постоянства скорости света распространяется сферическая световая волна, фронт которой удовлетворяет уравнениям

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0,\ x' + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0.$$

Отсюда следует, что квадратичная форма

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$$

во всех инерциальных системах имеет для светового сигнала одно и то же значение (в данном случае равное нулю). Инвариантность указанной квадратичной формы можно проверить для любых двух событий путем непосредственной подстановки значений нештрихованных величин, взятых по формулам лоренцевых преобразований (1.2) или (1.3). Пусть теперь $x_1$, $y_1$, $z_1$, $t_1$ и $x_2$, $y_2$, $z_2$, $t_2$ — координаты и времена каких-либо двух событий в данной системе отсчета. Пространственный интервал между событиями равен:

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ ,$$

а временной: $t_2 - t_1$.

Составим квадратичную форму в виде

$$(\Delta S)^2 = -c^2(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \quad (2.5)$$

и назовем $\Delta S$ *пространственно-временным интервалом* между рассматриваемыми событиями. Непосредственная проверка инвариантности квадратичной формы (2.5) по отношению к преобразованиям (1.2) не представляет каких-либо затруднений. Инвариантен, следовательно, и интервал $\Delta S$.

Квадрат пространственно-временного интервала (2.5) может быть положительным и отрицательным числом. В первом случае интервал называется *пространственноподобным*, во втором — *временноподобным*. События, разделенные пространственноподобным интервалом, отстоят друг от друга на таком большом расстоянии и следуют друг за другом так быстро, что световой сигнал за этот промежуток времени успевает пройти меньшее расстояние, нежели расстояние между точками, где произошли события. В этом случае среди инерциальных систем всегда найдется такая, в которой оба события будут одновременны, т. е. $t'_2 = t'_1$. Пространственно-временной интервал в этой системе совпадает с расстоянием между точками, в которых происходили события в один и тот же момент времени. События, причинно связанные друг с другом, не могут быть разделены пространственноподобным интервалом, так как в этом случае существовали бы физические взаимодействия, распространяющиеся со скоростью, большей $c$.

Для временн-подобного интервала расстояние между точками, в которых происходят события, меньше того расстояния, на которое успевает распространяться световой сигнал за промежуток времени, разделяющий события, т. е. $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 < (t_2 - t_1)^2c^2$.

Среди инерциальных систем найдется такая, в которой оба события происходят в одной точке и инвариантная величина интервала будет пропорциональна времени, протекающему между событиями в этой системе. Все причинно связанные события разделены временноподобными интервалами. Последовательность этих событий во времени одинакова во всех инерциальных системах.

Вместо инвариантной величины $\Delta S$, определяемой формулой (2.5), вводят другой инвариант преобразований Лоренца:

$$(\Delta \tau)^2 = (t_2 - t_1)^2 - \frac{1}{c^2}\left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right]. \quad (2.6)$$

Когда $\Delta \tau^2 < 0$ — интервал пространственноподобный, а при $\Delta \tau^2 > 0$ — времени-подобный. Во втором случае найдется инерциальная система, в которой интервал совпадает с промежутком времени, протекающим между событиями, происходящими в одной точке, т. е.

$$\Delta \tau = t_2' - t_1'.$$

Это собственное время, выраженное формулой (2.3).

Сказанное относительно конечных пространственно-временных интервалов полностью справедливо и для событий, разделенных бесконечно малыми интервалами. Бесконечно малый интервал может быть охарактеризован инвариантами

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2, \quad (2.7)$$

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (2.8)$$

В этих формулах и везде далее приняты следующие сокращенные обозначения $(dS)^2 = dS^2$, $(dx)^2 = dx^2$ и т. д. Из сравнения инвариантов (2.7) и (2.8) вытекает формула

$$dS = icd\tau. \quad (2.9)$$

Рассмотрим движение материальной частицы по некоторой траектории. Движение можно трактовать как непрерывную последовательность событий — попадания движущейся частицы в соответствующие моменты времени в разные точки траектории. Интервалы, разделяющие эти события, времени-подобны:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = v^2dt^2 \, (v < c). \quad (2.10)$$

В системе координат, которая в данный момент имеет такую же скорость, как и частица, т. е. в которой частица покоится, $d\tau$ совпадает с бесконечно малым промежутком времени $dt'$ между соседними событиями. Инвариантную величину $d\tau$ называют элементом собственного времени движущейся частицы. Связь между элементами собственного времени и временем в системе отсчета, по отношению к которой рассматривается движение частицы, получаем из (2.8):

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (2.11)$$

Итак, теория относительности не отрицает существование абсолютных величин. Как и в классической механике, в ней есть инварианты, не зависящие от выбора инерциальной системы отсчета. Теория, однако, устанавливает, что важнейшие инварианты классической механики — пространственные интервалы и промежутки времени — в действительности таковыми не являются. Инвариантом, соответствующим современному уровню знаний о свойствах пространства и времени, является пространственно-временной интервал.

## § 3. Четырехмерное пространство. Четырехмерные векторы

**3.1. Геометрическая интерпретация преобразований Лоренца.** Пространственно-временной интервал (2.5) в силу инвариантности по отношению к преобразованиям Лоренца может быть интерпретирован как расстояние между двумя точками в некотором четырехмерном пространстве с координатами

$$x_0 = ict,\ x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z. \tag{3.1}$$

Образуем пространственно-временной интервал, разделяющий событие, происшедшее в начале координат в момент $t = 0$, и событие, имеющее координаты $x_0$, $x_1$, $x_2$, $x_3$. По формуле (2.5) имеем:

$$S^2 = -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2.$$

А теперь будем считать $S^2$ квадратом длины радиус-вектора точки $M(x_0, x_1, x_2, x_3)$ в *четырехмерном пространстве* (сокращенное название — 4-пространство). Сам вектор обозначим $x_\alpha$, где $\alpha = 0, 1, 2, 3$, а квадрат его модуля $x_\alpha x_\alpha$. Последний в новых обозначениях запишем так:

$$x_\alpha x_\alpha = S^2 = -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \tag{3.2}$$

Заметим, что греческий индекс употребляется далее везде, где индекс принимает указанные четыре значения: $\alpha = 0, 1, 2, 3$. В остальных случаях в курсе используется латинский индекс. От известного нам выражения скалярного произведения двух обычных векторов в прямоугольных декартовых координатах формула (3.2) отличается знаком минус при первом слагаемом — произведении временных проекций четырехмерного радиус-вектора. Эта особенность отличает введенное 4-пространство от евклидового пространства, где все произведения входят со знаком «плюс». В геометрии такое пространство называется *вещественным псевдоевклидовым пространством индекса 1*, а в физике часто пространством Минковского.

Для того чтобы пользоваться обычным правилом нахождения скалярных произведений в этом пространстве, *временную проекцию (или координату) вектора снабжают мнимой единицей* (что и сделали в формуле (3.1)).

Основная цель введения 4-пространства состоит в применении хорошо разработанного математического аппарата тензорного исчисления в СТО. Именно этот аппарат оказался наиболее адекватным законам и соотношениям данного раздела физики.

Преобразования Лоренца, переводящие координаты точки 4-пространства из одной инерциальной системы в другую и сохраняющие неизменным $S^2$, т. е. квадрат модуля четырехмерного радиус-вектора точки, интерпретируются как *поворот осей прямоугольной системы координат.* Этот поворот в 4-пространстве определяется матрицей величин, играющих роль обычных направляющих косину-

сов при повороте осей в трехмерном пространстве:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & \frac{-i\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \frac{i\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

(здесь $V$ — скорость движения штрихованной системы в нештрихованной). Нетрудно убедиться, что преобразования Лоренца выражаются теперь матричными формулами поворота осей $x' = \Lambda X$, где $X$ — однорядная матрица

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

или

$$x'_\alpha = \sum_{\beta=0}^{3} \Lambda_{\alpha\beta} x_\beta, \quad (3.4)$$

причем «старой» системой является нештрихованная.

Можно рассматривать и обратное преобразование. При этом матрица обратного преобразования $\Lambda^{-1}$ получится из $\Lambda$ путем смены знака при $V$.

Как уже указывалось, пространство Мниковского не является евклидовым пространством, поэтому оно не изображается достаточно полио и наглядио на рнсунках н графиках в евклндовой плоскостн листа бумагн. Одиако с учетом иеполиого соответствня нзображения к нему все же прибегают. Рассмотрнм две оси $Oct$ и $Ox_1$ иа плоскостн чертежа (рнс. 3.1). Условнмся, что $t_1 = 0$ для начал всех рассматриваемых процессов н первых нз пар событнй. В таком случае все времеии-подобные интервалы лежат виутри вертикального угла, образоваиного биссектрисами $CC$ около оси $Oct$. Это область событий, которая может соотноситься с иачалом коордниат (первым событнем) как следствие с прнчнной.

Рассмотрим некоторую прямую $OM$ в указанной областн. Оиа состоит нз точек, каждая нз которых изображает событие (соответствует месту в пространстве $x$ и момеиту времени $t$). Прямую $OM$ ннтерпретируют как *мировую линию*, т. е. как траекторию движеиия так называемой *мировой точки*. Мировая лнння состоит из точек, последовательно изображающих события, каждое нз которых в свою очередь является, например, пребываннем материальной точкн в точках фнзнческого простраиства $x$, $y$, $z$ в момеит временн $t$. Все мировые лнннн, соответствующне реальиым движеииям, имеют углы иаклона к $Ox_0$, удовлетворяющне условию

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dx_1}{dct};\ \frac{1}{c}\frac{dx}{dt} = \frac{v_x}{c} < 1, \quad (3.5)$$

т. е. лежат внутрн указаниого угла. Бнссектрисы же $CC$ соответствуют мировым лнниям световых сигналов. Учитывая (неизображеиные) коордннаты $y$ и $z$, говорят о световом коиусе, разделяющем пространство событий иа две области: область виутрн коиуса, которая соответствует области реальных двнженнй, н область вне светового коиуса, где скорость движеннй превышает $c$.

В заключение параграфа отметим, что геометрнческая интерпретация обычно рас-

смотривается как удобный математический прием. Однако присоединение временной координаты на «равных правах» к пространственным имеет глубокий физический смысл: оно возможно при наличии *связи* между пространством и временем. Мы воспринимаем окружающие нас физические явления как происходящие в трехмерном пространстве в различные моменты времени. С точки зрения четырехмерного пространства событий мир в любой момент времени $t$ нами воспринимается как «сечение» с этого пространства трехмерной «плоскостью» $x_0 = \text{const}$. Рассматривая рисунок 3.1, замечаем, что «трехмерный покой» материальной точки соответствует движению мировой точки параллельно оси $Oct$. Возвращение движущейся материальной точки в некоторую точку физического пространства в 4-пространстве есть возвращение ее на прямую, параллельную оси $Ox_0$. Возвращение же назад, в некоторую точку 4-пространства, означающее возвращение к прошлому моменту времени, требует нарушения неравенства (3.5), т. е. движения со скоростью, превышающей $c$, что привело бы к нарушению причинно-следственной связи между явлениями.

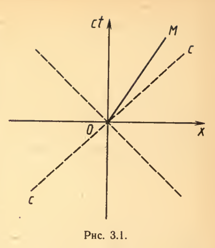


Рис. 3.1.

**3.2. Четырехмерные векторы.** Выше введен 4-вектор $x_\alpha$, являющийся радиус-вектором точки в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве. Кроме 4-радиус-вектора, существуют и другие 4-векторы.

Они представляют собой совокупности четверок величин, преобразующихся при переходе от одной инерциальной системы координат к другой по формулам (3.4) с помощью матриц $\Lambda$. Выявление таких величин позволяет придать ряду физических законов *заведомо инвариантную форму*, одинаковую во всех инерциальных системах отсчета и поэтому соответствующую принципу относительности Эйнштейна.

Рассмотрим вектор 4-скорости, который определим формулой

$$v_\alpha = \frac{dx_\alpha}{d\tau}. \tag{3.6}$$

Так как $d\tau$ — элемент собственного времени — инвариантная величина или скаляр преобразования Лоренца, а $dx_\alpha$ — 4-вектор, то $v_\alpha$ — 4-вектор.

Для проекций этого вектора имеем:

$$v_0 = \frac{ic}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad v_1 = \frac{v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$
$$v_2 = \frac{v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad v_3 = \frac{v_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{3.7}$$

Скалярный квадрат 4-скорости вычисляется по правилу скалярного

произведения:

$$v_\alpha v_\alpha = -\frac{c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = -c^2. \tag{3.8}$$

Он, как и должно быть, скаляр.

Существуют, кроме названных двух, и другие четырехмерные векторы. Они встретятся в релятивистской динамике (глава II) и далее в электродинамике.

Укажем, что пространственные составляющие 4-вектора являются обычными трехмерными векторами, поэтому удобна следующая сокращающая запись 4-векторов: $x_\alpha = (ict, \vec{r})$,

$$v_\alpha = \left(\frac{ic}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \quad \text{и т. д.}$$

Вычисления скалярных произведений при такой записи сокращаются, так как используются готовые формулы векторной алгебры для пространственных частей. Например,

$$v_\alpha v_\alpha = -\frac{c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

В заключение заметим, что объединение пространственных и временных координат позволяет математически наиболее кратко и исчерпывающе выразить свойства реального пространства и времени, а также свойства инерциальных систем отсчета, отражаемых преобразованиями Лоренца. Преобразования Лоренца в таком случае соединены воедино с геометрической моделью четырехмерного пространства-времени, так как переход от системы к системе рассматривается как поворот осей координат.

Пример 3.1. **Преобразования 4-вектора скорости.** По формуле преобразований векторов (3.7) имеем для проекций 4-скорости: $v'_\alpha = \sum_{\beta=0}^{3} \Lambda_{\alpha\beta} v_\beta$, или подробно

$$v'_0 = \frac{v_0 - i\frac{V}{c}v_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{1-\frac{V}{c^2}v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

$$v'_1 = \frac{i\frac{V}{c}v_0 + v_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad \frac{v'_x}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{v_x - V}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

$$v'_2 = v^2, \quad \frac{v'_y}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

$$v'_3 = v_3, \quad \frac{v'_z}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{v_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Подставляя в трн последнне формулы $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}$ нз первой, окончательно получаем уже нзвестные формулы преобразования скоростей (2.4):

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}, \quad v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}, \quad v'_z = \frac{v_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}.$$

Заметим, что нивариант 4-скорости можно находить в любой инерциальной снстеме отсчета, в том чнсле н в той, в которой в данный момент частица покоится: здесь $v_x = v_y = v_z = 0$ н

$$v_\alpha v_\alpha = v_0 v_0 = -c^2.$$

## Упражнения к главе I

1. Вывестн преобразоваиня Лоренца, нсходя из следующих линейных преобразоваинй:

$$x' = \alpha(x - Vt),$$
$$t' = \beta t + \gamma x,$$

где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — фуикцин скоростн $v$, н ннвариаитностн уравнения сфернческой световой волны

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - c^2(t')^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2.$$

2. Записать матрицу преобразованнй Лоренца для перехода от штрихованиой снстемы к нештрнхованной (обратиые преобразования по отиошенню к (3.3)).
3. В верхннх слоях атмосферы рождается мюон, двнжущийся со скоростью $v = 0{,}99$ с. До распада он успевает пролететь 5,00 км.

а) Каково время жизни мюоиа, наблюдаемое иамн, и чему оио равияется в системе коордниат, в которой мюон покоится?

б) Чему равна толщина слоя атмосферы, пройденного мюоном, нзмерениая в его «собственной» снстеме коорднат?

4. Световой сигнал распространяется в некоторой снстеме вдоль осн $Oy$. Найти проекцни н модуль его скоростн в другой системе. Вычислнть угол, на который отклоняется свет от оси $O'y'$ (угол аберрации).
5. Согласно прииципу причииности событие, являющееся следствием, должио иаступать после события, являющегося причиной. Показать, что иивариантность порядка событий обеспечивается преобразованнями Галилея н Лореица.
6. Рассмотреть ограничеиня, накладываемые на прнчиино-следственные связи коиечным характером скоростн распространения взаимодействий.
7. Каким образом устанавлнвается одновремениость двух событий?
8. Пользуясь преобразоваииямн Лореица, найти условня, при которых понятие одновременности инвариантно.
9. Установить постоянство размеров тела в перпеидикулярном направлении движению.
10. Вывести формулу преобразования объема тел при движеинн.
11. На плоскую поверхность под углом $\varphi$ падает пучок параллельных световых лучей. Перпендикулярно поверхностн перемещается тело. Какова скорость движения теии тела? Может ли она быть больше световой? Рассмотреть другие случаи, прн которых скорость иекоторой геометрической точки больше световой.
12. Два источника света двнжутся с релятнвистскими скоростями $v_1$ и $v_2$ навстречу друг другу. Определить скорость сближения источников, скорость сближения их излучений, скорость одиого нсточника относительно другого н скорость излучения, приходящего к одиому источнику от другого.

(Скорость сближеиия — это скорость умеиьшения расстояния между объектами в иекоторой системе, ие связанной с объектамн.)

Изучаемые в классической механике взаимодействия макроскопических тел, если они моделируются материальными точками, приводят к единственному результату — ускоренному движению. Динамические уравнения движения и их решения составляют поэтому главное содержание классической механики материальной точки и системы точек. *В релятивистской области* основное уравнение динамики $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ получает релятивистское обобщение, однако область практических применений уравнения сравнительно узка: в окружающем нас ближайшем мире макроскопические тела не движутся с релятивистскими скоростями, а релятивистское движение микрочастиц во многих случаях не описывается в рамках релятивистского уравнения динамики потому, что микрочастицы не движутся по определенным траекториям, не имеют определенных скоростей, а также претерпевают взаимные превращения, исчезают одни и возникают другие частицы. Лишь в частных случаях движения в так называемой *квазирелятивистской области,* например движения заряженных частиц в макроскопическом электромагнитном поле, релятивистское дифференциальное уравнение движения и изученная выше схема описания движения дают исчерпывающий результат: по заданной силе находится кинематическое уравнение. Описание же явлений, происходящих в системе с помощью законов сохранения универсальных динамических величин — энергии, импульса, момента импульса,— возможно в самом общем релятивистском случае взаимодействия. По этой причине для релятивистского движения особо важное значение приобретают динамические величины и законы их сохранения.

## § 4. Энергия, импульс и момент импульса свободной изолированной частицы и системы частиц

**4.1. Обсуждение метода получения динамических соотношений в СТО.** Выше рассматривались изменения, вносимые СТО в кинематические понятия координаты, времени механического события, скорости движения материальной точки. Определенные изменения постулаты Эйнштейна и преобразования Лоренца должны вызвать и в динамике. Это видно из следующих наглядных рассуждений. Основное уравнение динамики $\vec{F} = m\vec{a}$ при постоянной силе приводит к постоянному ускорению и к равноускоренному движению материальной точки со скоростью $v = v_0 + at$, которая может стать по истечении определенного времени больше световой, что противоречит предельному характеру скорости света. Следовательно, в релятивистской области основное уравнение классической механики несправедливо. Не всегда будет выполняться и третий закон Ньютона, так как появился новый физический объект — поле. Взаимодействие происходит между материальной точкой и полем, причем на точку со стороны поля действует сила, а силы противодействия нет, так как сила может действовать только на тела.

Рассмотреииые примеры показывают, что дниамнческие закоиы и величииы в релятивнстской механнке отличаются от класснческих. Для устаиовлеиия их используем важный для совремеииой физики *методологический прием:* будем отыскивать *инвариантные* по отиошеиию к преобразованням Лоренца соотношення, нбо вериые соотношеиня должиы быть лоренц-ниварнаитнымн в силу прииципа отиосительности Эйнштейна. В класснческой механнке изучеи метод описаиия движения Лаграижа, уравнеиия Лаграижа. Замечательной особениостью уравнений Лагранжа является их инвариаитиость по отношеиию к любому (непрерывиому, однозначиому) преобразованню коордннат, в том чнсле н преобразоваииям Лоренца. Поэтому метод Лагранжа удобен в рассматриваемом случае релятнвистского движення. Для прнменеиия этого метода иеобходимо составить фуикцню Лаграижа, которая заведомо была бы *инвариантом преобразований Лоренца.* Тогда получаемые с ее помощью диффереициальные уравиеиия движення будут иметь инвариаитиую форму.

В классической механике все днвамические велнчииы — импульс, момеит импульса, энергия — былн введеиы в связи с преобразованиями осиовиого уравиеиня дниамикн. В релятивнстской механике избнрается иной путь. С помощью уравиеиий Лаграижа установлено, что сохраиеиие обобщенной эиергии и обобщеиного импульса системы матерnальных точек есть следствие одиородности времеии и пространства, а сохраиение момеита импульса — изотропиостн пространства. Названиые фундамеитальиые свойства пространства переиосятся в СТО, поэтому мы *определим энергию, импульс и момент импульса в СТО как сохраняющиеся в силу свойств симметрии пространства-времени величины,* опнраясь на метод Лагранжа.

**4.2. Энергня и импульс свободной частицы.** Рассмотрим свободиую от связей н изолнроваиную от виешиих полей частицу. (Так как механические связи в релятнвистской динамнке ие рассматрнвают, термииологню часто упрощают и называют *свободную изолированную* частнцу просто *свободной* частицей.) Найдем для иее фуикцию Лаграижа.

Прнципп экстремальиого действия распространяется на релятивистскую механнку при условии, что действие

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_k \dot{q}_k t)\, dt \tag{4.1}$$

является ннварнаитом преобразоваиий Лореица. Перейдем от иеинвариаитиого $dt$ к нивариантному собствеииому времеии точки по формуле (2.11):

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

В таком случае подыитегральное выражеиие $L(q_k \dot{q}_k t)\, dt$ примет внд:

$$L(q_k \dot{q}_k t)\, dt = L'(q_k \dot{q}_k t)\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt \tag{4.2}$$

и будет инвариантом, если $L'(q_k\dot{q}_k t)$ — инвариант преобразований Лоренца.

В качестве обобщенных координат выберем декартовы координаты точки $x$, $y$, $z$, тогда обобщенными скоростями будут $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$, $v_z = \dot{z}$. В силу однородности пространства и времени $L'$ не может *явно* зависеть от координат и времени. А в силу изотропности пространства скорость может входить в $L'$ только по модулю, причем в степени не выше второй (см. I, пример 24.1). Инвариант, содержащий скорость, нам известен, это $v_\alpha v_\alpha$. Кроме того, в $L'$ должна входить инвариантная масса частицы, *измеренная в системе, где частица покоится*. На основании высказанных соображений запишем:

$$L' = mv_\alpha v_\alpha \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \qquad (4.3)$$

Используя функцию Лангранжа (4.3), находим составляющие обобщенного импульса релятивистской частицы (формула (I, 22.7)):

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_k}\left(-mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) = \frac{mv_k}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad (4.4)$$

$k = 1, 2, 3.$

Полученная величина и играет роль, аналогичную импульсу в классической механике. Она называется *релятивистским импульсом*. В обычных векторных обозначениях релятивистский импульс имеет вид:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (4.5)$$

Обобщенную энергию частицы вычислим, используя определение функции Гамильтона (I, 22.2):

$$H = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L,$$

откуда

$$H = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Обобщенная энергия в данном случае называется *релятивистской энергией* свободной частицы и обозначается буквой $E$:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (4.6)$$

Для системы свободных невзаимодействующих между собой частиц функция Лагранжа записывается как сумма одночастичных

функций, что вытекает из увеличения степеней свободы и соответствующих им обобщенных координат:

$$L = -\sum_{i=1}^{n} m_i c^2 \sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}. \tag{4.7}$$

Независимость функций Лагранжа от времени, обусловленная однородностью времени, приводит, как это показано в § 22 части I, к сохранению релятивистской энергии системы невзаимодействующих частиц:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}} = \text{const.} \tag{4.8}$$

Однородность пространства приводит к сохранению релятивистского импульса системы:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \vec{v}_i}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}} = \text{const.} \tag{4.9}$$

Выводы о сохранении сумм (4.8) и (4.9) для системы невзаимодействующих частиц тривиальны, так как сохраняются отдельные слагаемые — энергии и импульсы свободных частиц. Однако смысл их для нас заключается в другом: выводя законы сохранения, мы нашли в релятивистской области новые сохраняющиеся величины — релятивистскую энергию и релятивистский импульс, отличающиеся от классических.

Пример 4.1. **Нахождение связи между релятивистским и классическим импульсами.**

Связь релятивистского и классического импульсов устанавливается путем предельного перехода к классической области: либо $v \to 0$, либо $c \to \infty$, откуда

$$\lim_{c \to \infty} \vec{p} = m\vec{v} = \vec{p}_{\text{кл}}.$$

Пример 4.2. **Нахождение связи между релятивистской энергией и кинетической энергией материальной точки.**

Устанавливаем искомую связь с помощью разложения энергии (4.6) в ряд по формуле бинома, где ограничиваемся членом с малым сомножителем $\frac{v^2}{c^2}$: $E = mc^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2}$.

Слагаемое $mc^2$ называется *энергией покоя*, которая в классической области не проявляется, так как не изменяется в процессе взаимодействий.

Пример 4.3. **Нахождение связи релятивистской функции Лагранжа с классической.**

Аналогично примеру 4.2 устанавливается:

$$-mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \frac{mv^2}{2} - mc^2.$$

Слагаемое $mc^2$ может рассматриваться в этом случае как потенциальная энергия, однако как любая константа, прибавляемая к функции Лагранжа, влияния на динамические уравнения движения не оказывает.

**4.3*. Момент импульса.** В § 22 части I показано, что в силу изотропности пространства для замкнутой изолированной системы, описываемой лагранжианом $L$, сохраняется во времени величина:

$$\sum_{i=1}^{n} [\vec{r}_i \operatorname{grad}_{\vec{v}_i} L] = \text{const},$$

где $\operatorname{grad}_{\vec{v}_i} L = \vec{i}\frac{\partial L}{\partial v_x} + \vec{j}\frac{\partial L}{\partial v_y} + \vec{k}\frac{\partial L}{\partial v_z} = \vec{p}_i$

— вектор импульса свободной частицы.

Для релятивистской системы невзаимодействующих частиц функция Лангранжа должна быть известна; она выражается формулой (4.7). Расчет приводит для $\vec{p}_i$ к выражению релятивистского импульса. В результате сохраняется величина:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i \frac{m\vec{v}_i}{\sqrt{1-\frac{v_i^2}{c^2}}}\right] = \text{const}.$$

Таким образом, изотропность пространства позволяет ввести *релятивистский момент импульса частицы:*

$$\vec{L} = \left[\vec{r}\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right] \qquad (4.10)$$

и момент импульса системы — *сумму моментов частиц.* Момент импульса свободных частиц сохраняется во времени.

При переходе от одиой иерциальиой системы к другой проекции вектора момеита импульса преобразуются с помощью матрицы Лореица (3.3) как составляющие теизора второго раига:

$$L_{ik} = x_i p_k - x_k p_i \qquad (4.11)$$

с индексами $i$, $k = 1, 2, 3$.

Это видио из сравиеиия соответствующих составляющих формулы (4.11) и проекций векториого произведеиия (4.10):

$$L_{23} = x_2p_3 - x_3p_2 = yp_z - zp_y = L_x,$$
$$L_{31} = x_3p_1 - x_1p_3 = zp_x - xp_z = L_y,$$
$$L_{12} = x_1p_2 - x_2p_1 = xp_y - yp_x = L_z.$$

**4.4. Четырехмериый вектор энергии-импульса свободиой частицы. Формула Эйнштейиа.** Релятивистская энергия и релятивистский импульс объединяются преобразованиями Лоренца в единую величину — 4-вектор энергии-импульса. Чтобы показать это, образуем 4-вектор преобразований Лоренца по способу, указанному в § 3: умножим 4-скорость на скаляр $m$ и назовем полученный вектор *4-импульсом:* $p_\alpha = mv_\alpha$.

С учетом формулы (3.7), выделяя временную часть (она отве-

чает индексу 0 временного измерения), можно записать:

$$p_0 = \frac{imc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (4.12)$$

Пространственная часть 4-вектора $p_\alpha$ — вектор $\vec{p}$ — совпадает с релятивистским импульсом.

Временная часть $p_0$ (4.13) связана со второй сохраняющейся для свободной частицы величиной — релятивистской энергией (4.6). Легко устанавливаем, что

$$p_0 = \frac{iE}{c}. \qquad (4.13)$$

Запишем 4-импульс, вводя в его выражение энергию:

$$p_0 = \frac{iE}{c}, \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (4.14)$$

Определения релятивистского импульса (4.8) и релятивистской энергии (4.6) обретают физический смысл в процессе измерений. В макроскопической области кинематическими средствами измеряется скорость, по взаимодействию — масса, так что формулы для энергии и импульса (4.5) и (4.6) применяются и проверяются непосредственно. Величины энергия и импульс представляют собой универсальные характеристики тел и микрочастиц в свободном состоянии во всей изученной пространственно-временной области, в том числе и в микромире. Измерение их, помимо кинематического метода, возможно на основе законов сохранения, а также друг через друга, потому что имеется универсальная связь между энергией и импульсом.

Для получения этой связи воспользуемся формулами (4.14) и образуем скалярный квадрат 4-импульса: $-\frac{E^2}{c^2} + p^2 = -m^2c^2$, откуда

$$E = \pm c\sqrt{p^2 + m^2c^2}.$$

В настоящее время известны лишь тела и частицы с $m^2 \geqslant 0$, а объекты, где $m^2 < 0$, не обнаружены. Не обнаружены и объекты с отрицательной энергией (массой), так что приходим к *формуле связи энергии и импульса:*

$$E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}. \qquad (4.15)$$

Общая формула (4.15) часто называется формулой Эйнштейна. Она в частном случае $m = 0$ дает формулу

$$E = cp, \qquad (4.16)$$

применяемую для частиц без массы покоя.

Если $p \gg mc$, то для таких предельно релятивистских частиц также справедлива, но приближенно формула (4.16).

Если $v = 0$, то

$$E_0 = mc^2 \qquad (4.17)$$

—*энергия покоя* частицы. Это инвариант преобразований Лоренца.

С телами, если у них $m \neq 0$, может быть связана система отсчета, в которой частицы обладают только энергией покоя. Но имеются и объекты без массы покоя, соответственно с ними нельзя связать систему отсчета, так как в последней они просто не существуют, $m = 0$, $\vec{p} = 0$, $E = 0$. К объектам первого рода принадлежат макроскопические физические тела и большинство элементарных частиц. Объекты второго рода представлены прежде всего квантами электромагнитного поля — фотонами — и, возможно, гравитонами, нейтрино. Эти частицы существуют, лишь двигаясь со скоростью $c$.

Формула (4.16) выполняется для энергии и импульса макроскопического электромагнитного поля, распределенных в некоторой области пространства. При переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой 4-вектор энергии-импульса преобразуется в соответствии с общей формулой преобразования 4-векторов (3.4):

$$p'_\alpha = \sum_{\beta=0}^{3} \Lambda_{\alpha\beta} p_\beta.$$

Это значит, что релятивистская энергия и составляющие релятивистского импульса преобразуются друг через друга, совместно.

Пример 4.4. **Преобразование энергии и импульса.**

Пусть в штрихованной системе покоится частица с массой $m$. Четырехмерный вектор энергии-импульса здесь имеет проекции $p'_0 = imc$, $p'_1 = 0$, $p'_2 = 0$, $p'_3 = 0$. С помощью формул (3.4) и матрицы (3.3) имеем:

$$p_0 = \frac{imc}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad p_1 = \frac{mV}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = 0,$$

откуда энергия частицы в нештрихованной системе выражается формулой

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Имеет место и составляющая релятивистского импульса $p_x$.

**4.5. Классическая и релятивистская области. Масса покоя и релятивистская масса.** Формула (4.6) дает критерий для разграничения взаимодействий в классической и релятивистской областях. Если $v \ll c$, то выражение для энергии разлагаем по степеням малой величины $\left(\frac{v}{c}\right)^2$; ограничиваясь первым слагаемым, получаем:

$$E = mc^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2}. \qquad (4.18)$$

Полная энергия материальной точки складывается из энергии покоя, пропорциональной массе $m$, и кинетической энергии $T = \frac{mv^2}{2}$. Важно, что $\frac{mv^2}{2} \ll mc^2$, поэтому в классической области изменения энергии при взаимодействии малы по сравнению с энергией покоя и масса сохраняется. Однако в релятивистской области кинетическая энергия может быть сравнима с энергией покоя, а может и превышать ее в любое число раз. В таком случае закон сохранения энергии не будет препятствовать образованию новых частиц с переходом энергии движения в энергию покоя. *Опыт показывает*, что в релятивистской области при взаимодействиях элементарных частиц масса их не сохраняется. Это означает, что энергия покоя может переходить в энергию движения и наоборот.

Иногда вводят *движущуюся*, или *релятивистскую массу*, придавая релятивистскому импульсу (4.5) классический вид: $p = mv$. Для этого определяют релятивистскую массу соотношением

$$m_r = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (4.19)$$

С введением релятивистской массы $m_r$ (ранее введенная масса $m$ именуется *массой покоя*) зависимость между энергией и массой (4.6) и (4.17) для движущегося и покоящегося объектов становится единой: $E = m_r c^2$.

Релятивистская масса зависит от скорости и не является инвариантной величиной, что делает ее применение ограниченным, особенно для элементарных частиц, где масса покоя является одним из важнейших параметров частицы.

Итак, в классической области кинетическая энергия (приближенно) выражается формулой

$$T = \frac{p^2}{2m},$$

в релятивистской:

$$T = E - mc^2 = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} - mc^2.$$

В предельно релятивистской $T \approx E \approx cp$, причем связь ее с релятивистским импульсом определяется формулой, справедливой и для безмассовых частиц. По этой причине об энергии квантов электромагнитного поля говорят иногда как о кинетической энергии.

## § 5. Законы сохранения в системе взаимодействующих частиц

**5.1. Релятивистская модель взаимодействия. Понятие о поле.** В классической механике взаимодействие между материальными точками понимается как дальнодействие: система состоит только из тел, моделируемых материальными точками, и действие тел друг на друга осуществляется на расстоянии, передаваясь мгновенно.

СТО уточняет характер передачи взаимодействия, вводя не только предельную скорость $c$, но и переносчика взаимодействия — реально существующее материальное поле.

Необходимо различать передачу взаимодействия посредством поля в макромире и микромире. В макромире применяется *полевая*, или *квазирелятивистская*, модель материи и взаимодействия: в систему входят тела и непрерывное поле, передающее взаимодействие между телами. В микромире применяется квантово-релятивистская модель: в систему входят только микрочастицы, в том числе кванты полей. В квазирелятивистском случае число материальных точек в системе и их масса сохраняются; в квантово-релятивистском — число частиц и их масса может изменяться в результате взаимодействия.

Проведем подробный анализ взаимодействия для макроскопического случая. Квазирелятивистская модель системы содержит материальные точки и непрерывное поле. Взаимодействие же есть близкодействие, т. е. действие поля на материальную точку в той геометрической точке поля, в которой материальная точка находится. Одно тело действует на другое не непосредственно, а через поле, которое создает вокруг себя.

Поле распространяется в пространстве с конечной скоростью, не большей скорости света $c$.

В классической механике понятие поля использовалось, однако оно имело чисто математический характер, так как никакому материальному объекту в пространстве силовое поле не соответствовало. Рассматривалась сила, действующая на материальную точку со стороны других точек, как функция координат точки пространства. В релятивистской же механике схема взаимодействия изменяется принципиально — поле входит в систему как материальный объект, обладающий энергией и импульсом, распределенными по пространству непрерывно (макроскопическое поле занимает большие области пространства). Взаимодействие в системе состоит в *непрерывном* обмене импульсом и энергией между материальными точками и полем.

В природе известны *два макроскопических поля: электромагнитное и гравитационное*. Оба они входят в соответствующие системы взаимодействующих материальных объектов. Так, гравитационное поле связывает между собой любые макроскопические тела, проявляясь прежде всего в силе всемирного тяготения. Электромагнитное же поле входит в систему электрически заряженных тел или частиц. Однако при изучении первых и вторых систем выясняется их значительное отличие друг от друга.

Подавляющая часть проявлений гравитационных взаимодействий в окружающем нас мире на Земле и в Солнечной системе укладывается (хотя и в приближении) в *схему классической механики*, тогда как электромагнитные взаимодействия в большинстве случаев носят *релятивистский характер*. Поэтому гравитационное поле описывалось в курсе классической механики только по своему силовому действию, а электромагнитное будет изучаться как самостоятельный

релятивистский объект; движение в ием дополияется релятивистской динамикой[1].

В квантово-релятнвистской моделн оба внда матерни — вещество и поле — *дискретны и состоят из элементарных частиц*. Например, электромагнитное поле состоит из фотонов, отлнчающнхся от элементарных частиц вещества иулевой массой. В мнкромнре наряду с электромагнитным полем нзвестны еще два фундаментальных поля: снльное н слабое. Их кванты — глюоиы и $\pi$-мезоны, промежуточные мезоны $W^+$, $W^-$, $Z^0$ — нмеют отличную от нуля массу, а взанмодействне передают только иа очень малые — микроскопические — расстояиия ($r \leqslant 10^{-15}$ м). Таким образом, если на макроуровие система взаимодействующнх тел включает непрерывное поле, то на микроуровие она состонт только нз днскретных матерниальных объектов — элементарных частнц. Взанмодействие здесь передается соответствующнми частицами — квантамн полей — прн их непосредственном контакте н нмеет квантовый характер. Результат взаимодействня состонт не только в механическом двнжеинн, а н в нсчезновеннн однох и образовании других частнц.

**5.2. Закон сохранення энергнн н нмпульса для замкнутой нзолнрованной релятнвистской снстемы.** Рассмотрим сиачала макроскопическую систему заряженных тел (материальных точек) и непрерывиого (электромагнитного) поля. Система иазывается в механике замкиутой, если в ней действуют только виутренние силы, т. е. силы взаимодействия только между точками системы. Как известно, для потенциальных сил в замкиутой системе сохраняется механическая эиергия, а для любых сил — импульс и момент импульса системы. Соответствующие величиины введены выше для релятивистских частиц, и показаио, что в системе невзаимодействующих частиц, т. е. системе без поля, оии сохраняются. Теперь переходим к системе с взаимодействием.

Поскольку в релятивистском случае в систему материальных точек входит поле, механическое понятие замкнутости оказывается иедостаточиым. Расширим его иа квазирелятивистскую систему. *Система называется замкнутой изолированной, если не испытывает взаимодействия со своим окружением, нет поля излучения из системы и нет других полей излучения, поступающих в систему.*

Таким образом, в системе имеется только поле, созданное входящими в иего телами; через иего и осуществляется взаимодействие тел.

Такое определеиие замкнутой изолированиой системы оказывается целесообразиым расширением поиятия механической замкнутой системы потому, что для иее строго *сохраняются при любых известных в настоящее время взаимодействиях релятивистская энергия системы, релятивистский импульс системы, момент импульса системы*. В отличие от полиой механической эиергии системы, включающей в себя кииетическую и потеициальную, теперь эиергия складывается из релятивистских эиергий всех тел и эиергии поля, иепрерывно распределеиной в пространстве:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i c_i^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} + \int_V w dV = \text{const}, \tag{5.1}$$

где $w$ — плотность энергии поля.

[1] В настоящее время релятивнстскне поправки учитываются в точных расчетах двнжения планет н другнх тел Солнечиой системы.

Аналогичны формулы законов сохранения импульса и момента импульса системы:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \vec{v}_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} + \int_V \vec{g}\, dV = \text{const}, \tag{5.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i [\vec{r}_i \vec{v}_i]}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} + \int_V \vec{l}\, dV = \text{const}, \tag{5.3}$$

где $\vec{g}$ — плотность импульса, $\vec{l}$ — плотность момента импульса поля. Заметим, что сейчас законы сохранения нами не выводятся потому, что еще не изучены законы поля — сохранение энергии и импульса для электромагнитного поля будет выведено позже как следствие законов механики и электродинамики. Законы (5.1), (5.2), (5.3) следует считать *очень общими постулатами* — принципами сохранения, являющимися обобщением опыта.

Перейдем к квантово-релятивистской системе. *Замкнутой изолированной будем называть систему, в которой взаимодействие частиц происходит только друг с другом; извне частицы в систему не поступают и из системы частицы не излучаются.* Как правило, сам механизм взаимодействия для предельно релятивистских систем неизвестен, т. е. неизвестны динамические законы, описывающие превращения частиц. Поэтому практически очень важным является следующий случай взаимодействия в системе.

Имеется система удаленных друг от друга частиц, так что их можно считать невзаимодействующими. Такую систему называют системой *асимптотически невзаимодействующих частиц.* Затем частицы сближаются, взаимодействуют и расходятся на такие большие расстояния друг от друга, что снова их можно считать невзаимодействующими. Для системы при любых известных в настоящее время взаимодействиях на основании обобщения опыта постулируется *строгое сохранение энергии, импульса, момента импульса:*

$$\sum_{i=1}^{n} c\sqrt{p_i^2 + m_i^2 c^2} + \sum_{k=1}^{N} c p_k = \sum_{i=1}^{n'} c\sqrt{p_i'^2 + m_i'^2 c^2} + \sum_{k=1}^{N'} c p_k', \tag{5.4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i + \sum_{k=1}^{N} \vec{p}_k = \sum_{i=1}^{n'} \vec{p}_i' + \sum_{k=1}^{N'} \vec{p}_k', \tag{5.5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i + \sum_{k=1}^{N} \vec{S}_k = \sum_{i=1}^{n'} \vec{L}_i' + \sum_{k=1}^{N'} \vec{S}_k'. \tag{5.6}$$

В формулы включены импульсы частиц без масс покоя $(\vec{p}_k)$, орбитальные моменты импульса, вызванные движением частиц как материальных точек $\vec{L}_i$, собственные моменты, измеренные в системе, где частица покоится, $\vec{S}_k$.

При использоваиин формул (5.4) — (5.6) следует нметь в виду, что отдельио ии масса покоя, ни число частиц, ни делеиие на частицы с нулевой н отличиой от нуля

массой не сохраняются, т. е. закон не запрещает различные взаимные превращения частиц. В этой связи можно заметить, что закон сохранения вещества Ломоносова — Лавуазье, эквивалентный утверждению о сохранении массы покоя, в релятивистской области несправедлив: происходят взаимные превращения вещества и поля.

**5.3. Энергия связи. Масса системы связанных частиц.** При изучении строения вещества выяснена общая закономерность: физические объекты, рассматриваемые на некотором структурном уровне деления как самостоятельные цельные образования, оказываются состоящими из отдельных частей — более простых структурных единиц. Например, тела состоят из атомов, атомы — из ядра и электронов, ядра — из нуклонов. Отдельные части связаны в целом тем или иным взаимодействием, причем многие объекты характерны устойчивостью по отношению к внешним воздействиям; чтобы систему разделить на части, требуется сообщить ей определенную энергию $\Delta E$. Эта энергия носит название *энергия связи*, и так как она сообщается устойчивой системе, то считается отрицательной. Следовательно, чем больше энергия связи по модулю, тем устойчивее система. Соответственно при образовании целого (системы) из частей выделяется энергия, равная модулю энергии связи.

Энергия связи является важной характеристикой взаимодействия, соединяющего части в целое, и в то же время важной характеристикой данных систем как структурных единиц вещества. В ряде случаев фундаментальные законы физики — уравнения, описывающие взаимодействие и движение,— позволяют вычислить энергию связи. Именно так нами вычислялась потенциальная энергия системы двух материальных точек, притягивающихся друг к другу с силой всемирного тяготения:

$$U = -G\frac{mM}{r}. \qquad (5.7)$$

Это и есть энергия связи данной системы, если точки находятся друг от друга на расстоянии $r$.

Теоретически удается вычислить энергию связи для электрона в атоме, молекуле. Но во многих других случаях энергия связи определяется экспериментально, а теория не достигла уровня, необходимого для ее исчерпывающего расчета. Так обстоит дело с энергией связи нуклонов в ядре атома, кварков в элементарных частицах. Имеет место общая качественная закономерность: энергия связи *растет с уменьшением* размеров системы и расстояния между ее структурными частями. Удельная энергия связи, т. е. энергия связи, приходящаяся на структурную единицу по порядку величин, приведена в таблице 3.

Обратимся теперь к взаимосвязи энергии и массы. Согласно формуле (4.17) энергии связи соответствует изменение массы:

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}. \qquad (5.8)$$

Это значит, что масса целого, образованного взаимодействием частей, меньше массы частей, взятых в свободном состоянии, т. е. вне

взаимодействия. Масса оказывается, таким образом, величиной *неаддитивной*. Неаддитивность массы обусловлена и другим обстоятельством: зависимостью релятивистской энергии (или массы) от скорости движения. Если энергия связи уменьшает массу системы, то кинетическая энергия движения частиц в системе увеличивает ее. Надо, однако, учесть, что для устойчивой системы энергия связи больше кинетической энергии движения частей системы.

На основании сопоставления энергии связи в разных системах заключаем, что в классической области взаимодействия, отличающейся малыми энергиями связи, с обеспечивающим высокую точность результатов приближением, *можно пользоваться законом сохранения массы тел*. Так, например, об убыли массы системы Солнце — Земля или Земля — тело при объединении их в систему силами тяготения говорить не приходится. Также следует пренебречь этой убылью при образовании систем на атомно-молекулярном уровне. Например, при сгорании 2 млн. кг нефти масса продуктов сгорания — нефти и кислорода — уменьшается примерно на 1 г. Но уже для ядра, образовавшегося в результате соединения нуклонов, изменения массы могут составлять от тысячной до сотой части.

С ядер как систем нуклонов по энергии связи и начинается область релятивистских систем. Что касается элементарных частиц, то масса кварков, составляющих нуклоны, превышает массу самих нуклонов, вероятно, в несколько раз. Говорить о сохранении массы покоя в таких процессах, конечно, нельзя. Более того, известны реакции с элементарными частицами, при которых в результате взаимодействия полностью исчезает масса покоя; например, при аннигиляции электрона и позитрона образуются два фотона — частицы без массы покоя.

В микромире энергия связи часто определяется измерением убыли массы путем сравнения масс свободных частиц, входящих в систему, и массы системы. Формулы

$$\Delta m = M - \sum_{i=1}^{n} m_i, \quad \Delta E = c^2 \left(M - \sum_{i=1}^{n} m_i\right) \tag{5.9}$$

применяются непосредственно, например, для определения энергии связи ядер.

Пример 5.1. **Применение понятия энергии связи для качественного анализа массы макроскопических тел.**

Тело состоит из элементарных частиц, массы которых входят в массу тела. Но масса тела не равна сумме масс этих частиц; кинетическая энергия движения частиц увеличивает массу тела, а энергия связи уменьшает ее. Энергия связи обусловлена изменением энергии полей, обеспечивающих взаимодействие частиц. Поле обладает энергией и дает вклад в массу как элементарной частицы, так и тела, в состав которого последняя входит. При этом связь микрочастиц образуется потому, что «полевая» часть энергии и массы частиц при образовании устойчивой системы уменьшается.

На уровне элементарных частиц вклад в энергию и массу вносят кванты поля, передающие взаимодействие. В стационарных случаях эти кванты называются виртуальными. Например, электромагнитное поле электрона — это окружающее его (весьма разреженное) облако виртуальных фотонов; «сильное» поле нуклона образовано плотным облаком $\pi$-мезонов и т. д. При образовании устойчивых систем

часть виртуальных квантов переходит в реальные частицы или кинетическую энергию частиц, т. е. масса частиц, вступающих в связь, уменьшается, а энергия покоя системы переходит в другие формы или к другим (образовавшимся) частицам. Но ответить в настоящее время на вопрос, каково соотношение между массой «голой» частицы и массой ее «шубы» — облака виртуальных квантов, не представляется возможным.

Пример 5.2. **Распад частиц (экзотермическая реакция).**

Кроме соединения частей в целое с образованием устойчивых систем, имеет место и распад квазиустойчивых систем на части с выделением энергии. Рассмотрим распад тела или микрочастицы с массой $M$ на две части с массами $m_1$ и $m_2$ в системе отсчета, где исходное тело покоилось. В таком случае по закону сохранения энергии

$$Mc^2 = \frac{m_1c^2}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} + \frac{m_2c^2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}}. \qquad (5.10)$$

Равенство (5.10), в силу того что корни в знаменателях меньше единицы, выполняется при условии

$$M > m_1 + m_2, \ \Delta m > 0. \qquad (5.11)$$

Таким образом, распад идет с выделением кинетической энергии за счет уменьшения энергии покоя:

$$T = [M - (m_1 + m_2)]\, c^2.$$

Процессы такого рода в физике носят общее название — *экзотермические.*

Пример 5.3. **Распад частиц, порог реакции.**

Для устойчивых систем выполняется неравенство

$$M < m_1 + m_2, \ \Delta m < 0.$$

Для распада необходимо сообщение системе энергии извне, равной модулю энергии связи; процесс распада в этом случае относится к *эндотермическим.* Эндотермический процесс характеризуется *порогом реакции* — минимальной энергией, необходимой для распада. Поскольку в случае эндотермической реакции необходимо внешнее воздействие, то необходима и частица, приносящая энергию. Порог реакции будет равен кинетической энергии относительного движения сталкивающихся частиц в системе центра масс этих частиц, если в ней продукты распада покоятся, т. е. кинетическая энергия равна энергии связи:

$$E_{\text{пор}} = |\,\Delta E\,|\,. \qquad (5.12)$$

Пример 5.4. **Объяснение квазиустойчивости системы.**

Устойчивость системы при отрицательной энергии связи понятна с точки зрения сохранения энергии, а относительную устойчивость системы при положительной энергии связи требуется дополнительно объяснить. Рассмотрим график зависимости энергии связи от расстояния между частицами системы (рис. 5.1). Энергия связи увеличивается до расстояния $r_0$, что и соответствует устойчивости. Если же системе сообщить энергию, равную порогу, меньшую энергии связи, т. е. $E_{\text{пор}} = E_0 - E_{\min}$, то далее расстояние между частицами будет увеличиваться с выделением энергии. Такая ситуация характерна для деления тяжелых ядер, например, для ядер урана.

Надо отметить, что при взаимодействии в микромире часто о силе говорят не в обычном механическом смысле как о причине ускорений, а применительно к энергии связи: *если энергия связи частей системы растет с расстоянием, то эти части притягиваются, если же она убывает — части отталкиваются.* Такая «силовая» терминология широко применяется за пределами классической механики, в том числе и тогда, когда основное уравнение динамики, позволяющее измерить силу по ускорению, оказывается совершенно неприменимым. (Например, к системе, состоящей из нуклонов, связанных в ядре ядерными силами притяжения.)

Пример 5.5. **Расчет порогового значения энергии в лабораторной системе.**

Обычно кинетическая энергия, вызывающая распад частицы, измеряется в лабораторной системе — это комната, где находится экспериментатор. В таком случае часть энергии в распаде не участвует, так как относится к энергии движения центра масс продуктов распада. Вычислим пороговое значение энергии в лабораторной системе.

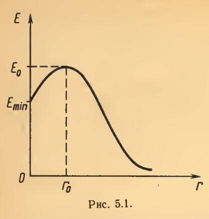


Рис. 5.1.

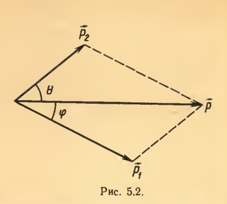


Рис. 5.2.

Пусть частица массой $\mu$ и с энергией $\varepsilon$ налетает на покоящуюся частицу массой $M$ и происходит распад. В результате распада появляется несколько частиц $m_i$. Законы сохранения энергии и импульса для процесса запишутся в виде уравнений

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} p_i, \quad \varepsilon + Mc^2 = \sum_{i=1}^{n} E_i.$$

Используя инвариантную величину — скалярный квадрат 4-импульса,— и применяя этот инвариант для перехода в систему отсчета центра масс, в которой при пороговом значении энергии все образовавшиеся частицы $m_i$ покоятся, получим:

$$\frac{(\varepsilon + Mc^2)^2}{c^2} - p^2 = c^2\Big(\sum_i m_i\Big)^2. \qquad \text{(a)}$$

Используя для налетающей частицы ту же формулу, имеем:

$$p^2 = \frac{\varepsilon^2}{c^2} - \mu c^2,$$

что позволяет заменить в (а) $p$ через $\varepsilon$ и найти $\varepsilon$:

$$\varepsilon = \frac{c^2(\sum_i m_i)^2 - \mu^2 c^2 - M^2 c^2}{2M}. \qquad \text{(б)}$$

Осталось найти пороговое значение энергии, равное кинетической энергии налетающей частицы в данных условиях:

$$E_{\text{пор}} = T = \varepsilon - \mu c^2.$$

Из (б) получим:

$$E_{\text{пор}} = \frac{c^2(\sum_i m_i)^2 - c^2(\mu + M)^2}{2M} = \frac{c^2(\sum_i m_i + \mu + M)\,(\sum_i m_i - \mu - M)}{2M}.$$

Выразим пороговое значение энергии в лабораторной системе через энергию связи (5.9):

$$E_{\text{пор}} \simeq -\Delta E\left(\frac{\sum_i m_i}{M} + \frac{\Delta E}{2Mc^2}\right).$$

При больших значениях $\Delta E$ пороговое значение энергии оказывается большим, так как $\Delta E$ входит в него в квадрате. Этот релятивистский эффект затрудняет осуществление соответствующих реакций.

П р и м е р 5.6. **Упругое соударение частиц.**

Рассмотрим столкновение двух частиц с массами и импульсами: $m$, 0 и $\mu$, $\vec{p}$. В релятивистской области столкновения называются упругими, если *массы частиц не изменяются*. После столкновения неподвижная частица $m$ будет двигаться с импуль-

сом $\vec{p}_1$, а движущаяся изменит импульс на $\vec{p}_2$ (рис. 5.2). На основе законов сохранения запишем равенства:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2, \quad (1)$$

$$mc^2 + E = E_1 + E_2. \quad (2)$$

В классическом случае решался вопрос о скоростях частиц после удара (см. I, пример 4.3); в релятивистском — ставится аналогичная задача о переданной энергии при ударе. Найдем кинетическую энергию ранее покоящейся частицы:

$$T = E_1 - mc^2.$$

С помощью (2) запишем выражение для энергии:

$$E = E_2 + E_1 - mc^2 = E_2 + T, \quad (3)$$

которое с учетом (4.15) примет вид:

$$\sqrt{p^2c^2 + \mu^2c^4} = \sqrt{p_2^2c^2 + \mu^2c^4} + T. \quad (4)$$

На основании рисунка 5.2 получим:

$$p_2^2 = p^2 + p_1^2 - 2pp_1\cos\varphi. \quad (5)$$

Для исключения из (4) и (5) $p_2$, предварительно пользуясь формулой (4.15), заменим $p_1$ через $T_1$:

$$p_1^2 = \frac{T_1^2 + 2mc^2T_1}{c^2}. \quad (6)$$

Далее возводя (3) в квадрат и подставляя в него $p_2^2$ из (5), а также заменяя $p_1^2$ по (6), получим:

$$pp_1c^2\cos\varphi = T(\sqrt{p^2c^2 + \mu^2c^4} + mc^2).$$

Снова возведем равенство в квадрат и заменим $p_1$. Окончательно получим выражение для кинетической энергии:

$$T = \frac{2mp^2c^4\cos\varphi}{(\sqrt{p^2c^2 + \mu^2c^4} + mc^2)^2 - p^2c^2\cos\varphi}. \quad (7)$$

Передаваемая энергия зависит от $p$, $\mu$, $m$ и угла $\varphi$, который определяется не законами сохранения, а некоторым механизмом соударения, не учтенным в задаче.

Анализ формулы (7) показывает, что наибольшая передаваемая энергия получается при «лобовом» ударе, когда $\varphi = 0$. Релятивистские особенности соударения проявляются для быстрых частиц. Пусть $\varphi = 0$, $\mu \gg m$, а $pc \gg \mu c^2$. Тогда

$$T \simeq 2mc^2\frac{p^2c^2}{2mc^2pc + \mu^2c^4}.$$

Если имеет место сильное неравенство

$$pc \gg \frac{\mu^2c^4}{mc^2},$$

то

$$T \simeq pc \simeq E,$$

т. е. передается почти вся энергия налетающей частицы, что существенно отличается от классического соударения, при котором массивная частица не может передать легкой частице значительную часть своей энергии.

Отличия от классики имеются и в случае легкой падающей частицы. Пусть $\mu \ll m$, но если импульс ее велик, $pc \gg \mu c^2$, то

$$T \simeq 2mc^2\frac{p^2c^2}{2mc^2pc + m^2c^4}.$$

При наличии неравенства $pc \gg mc^2$

$$T \simeq pc \simeq E,$$

т. е. вопреки классической закономерности возможна почти полная передача энергии.

Пример 5.7. **Комптон-эффект.**

Рассмотрим соударение частицы без массы покоя с обычной частицей, например фотона с электроном. Это явление называется комптон-эффектом. Задача состоит в нахождении энергии фотона после взаимодействия. Используя результаты предыдущего примера, учтем, что для фотона на основании формулы (4.16) $p = \frac{E}{c}$. Поэтому имеем:

$$p_1^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 + \left(\frac{E_2}{c}\right)^2 - \frac{2EE_2}{c^2}\cos\vartheta. \tag{1}$$

Здесь $\vartheta$ — угол, составляемый импульсом фотона после взаимодействия с импульсом до взаимодействия (см. рис. 5.2). Закон сохранения энергии дает соотношение

$$mc^2 + E = E_1 + E_2, \tag{2}$$

причем

$$E_1 = c\sqrt{p_1^2 + m^2c^2}. \tag{3}$$

Определяя из (3) величину

$$c^2p_1^2 = E_1^2 - m^2c^4$$

и подставляя в нее значение $c^2p_1^2$ из (1), имеем:

$$E_1^2 - m^2c^4 = E^2 + E_2^2 - 2EE_2\cos\vartheta.$$

Значение $E_1^2$ в последнем уравнении исключим с помощью соотношения (2):

$$m^2c^4 + E^2 + E_2^2 + 2mc^2E - 2mc^2E_2 - 2EE_2 - m^2c^4 = E^2 + E_2^2 - 2EE_2\cos\vartheta.$$

Отсюда находим $E_2$:

$$E_2 = \frac{mc^2E}{mc^2 + E(1 - \cos\vartheta)}.$$

Изменение энергии фотона при соударении с учетом квантовых соотношений приводит к изменению длины волны рассеянного света. Передаваемая энергия превращается в кинетическую энергию электрона:

$$T = E - E_2 = \frac{E^2(1 - \cos\vartheta)}{mc^2 + E(1 - \cos\vartheta)}.$$

Она значительна при

$$E \gg mc^2,$$

т. е. при высокочастотных излучениях.

## § 6. Релятивистское обобщение основного уравнения динамики. Частица в силовом поле

**6.1. Лоренц-инвариантная форма дифференциального уравнения движения материальной точки.** Обратимся сейчас к законам Ньютона и рассмотрим их применимость для релятивистской области. В соответствии с законом сохранения релятивистского импульса для свободной изолированной материальной точки делаем вывод: *первый закон Ньютона справедлив для релятивистской области;* свободная изолированная материальная точка движется равномерно прямолинейно в любой инерциальной системе. Второй закон Ньютона приводит к очевидным противоречиям с положением о существовании предельной скорости движения материальных тел и должен быть специально обобщен для *квазирелятивистской* области движения.

Рассмотрим взаимодействие, при котором передаваемая энергия удовлетворяет неравенству $E < mc^2$, т. е. масса покоя, а с ней и другие внутренние параметры материального тела или частицы сохра-

няются. В то же время скорость достаточна для того, чтобы принн-мать в расчет ие классическне, а релятнвнстскне зиачеиня для основ-иых дииамических характеристик материальной точки: ее энергии и нмпульса. Такой случай н называют, как говорилось выше, ква-знрелятивнстскнм.

Если импульс матернальной точки нзменяется непрерывно н в не-которой иерциальиой снстеме известиа скорость передачи импульса материальной точке нзвне, то эту *скорость передачи импульса,* как н в классннческой механнке, можно иазвать *силой.* Еслн снла задана как фуикция коордииат точкн простраиства, скорости н времени, то, используя выражение для релятивистского импульса (4.5), можно иаписать равеиство, выражающее закои сохранеиия импульса при передаче его между полем и точкой:

$$\frac{d}{dt}\,\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\vec{F}(\vec{r},\ \vec{v},\ t). \tag{6.1}$$

Это равенство и является *релятивистским обобщением основного уравнения динамики.* Осиовное уравиенне классической дииамики

$$\frac{dm\vec{v}}{dt}=\vec{F}(\vec{r},\ \vec{v},\ t) \tag{6.2}$$

ннварнантио по отношенню к преобразоваииям Галнлея, а релятн-вистское уравнеиие (6.1) должно быть инварнантио по отношению к преобразоваииям Лоренца. Чтобы придать (6.1) явиую иивариаит-иую форму, нспользуем математнческий формализм 4-пространства. Предварительио получим нитеграл эиергни, т. е. умножим обе частн уравнеиня (6.1) на $d\vec{r}$:

$$\vec{v}d\,\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\vec{F}d\vec{r}=\delta A. \tag{6.3}$$

Пронзведя действия, убеждаемся в справедливости тождества

$$d\,\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\equiv\vec{v}d\,\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \tag{6.4}$$

поэтому из (6.3) следует, что

$$\frac{d}{dt}\,\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\vec{F}\vec{v}, \tag{6.5}$$

где $\vec{F}\,\vec{v}$ — механическая мощность. Перепншем теперь (6.1) и (6.5), нспользуя обозиачеиня составляющнх 4-импульса $p_\alpha$:

$$\frac{d}{dt}\vec{p}=\vec{F},\ \frac{d}{dt}p_0=\frac{i}{c}\vec{F}\,\vec{v}.$$

Последиий этап состоит в замене $t$ иа нвариаитиое собствеиное время (2.11):

$$\frac{dp_0}{d\tau}=\frac{i\vec{F}\,\vec{v}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad \frac{d\vec{p}}{d\tau}=\frac{\vec{F}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{6.6}$$

В формулах (6.6) слева стоит четырехмерный вектор $\frac{dp_\alpha}{d\tau}$, поэтому справа величины также образуют 4-вектор:

$$f_\alpha = \left( \frac{i\vec{F}\vec{v}}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\vec{F}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right); \tag{6.7}$$

он носит название *силы Минковского*.

Итак, релятивистскому уравнению динамики (6.1) вместе с уравнением закона изменения энергии (6.4) придана четырехмерная форма, неизменная во всех ИСО:

$$\frac{dp_\alpha}{d\tau} = f_\alpha. \tag{6.8}$$

Обсудим смысл полученного результата (6.8) подробнее.

В классической механике инвариантность уравнения (6.2) означает не только неизменность его формы во всех ИСО, но и сохранение входящих в него величин: массы, ускорения $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, силы. В релятивистской механике положение иное: *инвариантна лишь масса*, в то время как 4-импульс и 4-сила в (6.8) не инварианты преобразований Лоренца, а 4-векторы, преобразующиеся по формулам (3.4). *Сохраняется лишь общая форма уравнений движения* (6.8) во всех ИСО. Что же касается входящих в них величин — проекций 4-векторов, то они в разных системах имеют *различные* значения. Сохранение формы уравнений (при изменяющихся в них величинах) в математике называют ковариантностью. Таким образом, получены уравнения движения (6.8), *ковариантные* по отношению к преобразованиям Лоренца. Для практических применений следует пользоваться системой уравнений (6.1) и (6.5), эквивалентной четырехмерному уравнению (6.8). *Эти уравнения также будут ковариантны, т. е. будут иметь указанный в равенствах (6.1) и (6.5) вид во всех инерциальных системах, если $\vec{F}$ преобразуется в соответствии с ее связью с 4-силой (6.7).*

Уравнения (6.1) и (6.5) рассмотрены нами для движения тела или частицы в заданном поле, т. е. в случае, когда поле не изменяется при перемещении частицы, а сила известна как функция координат, скорости и времени.

Однако эти уравнения описывают квазирелятивистское движение тела и в других случаях взаимодействия, т. е. могут быть учтены не только силы, действующие на тело со стороны гравитационного или электромагнитного поля, но и силы инерции, реакции связей, диссипативные силы, реактивная сила тяги, лишь бы они были известны как скорость передачи импульса телу. Иное дело, что практически квазирелятивистское уравнение находит себе сравнительно узкое применение. Так, в пределах Солнечной системы для описания движения в гравитационном поле достаточно в большинстве случаев классической механики. То же относится и к другим перечисленным выше силам, так как релятивистские уравнения динамики здесь вполне заменяются классическими. В основном этим уравнениям подчиняется движение заряженных материальных точек, моделирующих малые тела, элементарные частицы в макроскопическом электромагнитном поле.

Чтобы закончить анализ возможностей применения законов Ньютона в релятивистской области движений, необходимо еще остановиться на *третьем законе Ньютона*. Очевидно, что в *общем случае он*

*не выполняется,* так как обмен импульсом между телами осуществляется через поле. Совсем не обязательно, чтобы скорость изменения импульса одного тела из двух взаимодействующих была равна скорости изменения импульса другого тела, так как часть импульса может сообщаться полю. Это видно из закона сохранения импульса (5.2), который для двух точек и поля имеет вид:

$$\frac{m_1\vec{v}_1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{m_2\vec{v}_2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \vec{P}_{\text{поля}} = \text{const}.$$

Если

$$\frac{dP}{dt} \neq 0,$$

то

$$\frac{d}{dt}\,\frac{m_1\vec{v}_1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \neq -\frac{d}{dt}\,\frac{m_2\vec{v}_2}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad \vec{F}_{1,2} \neq -\vec{F}_{2,1}.$$

Силы, приложенные к точкам, не равны друг другу.

Пример 6.1. **Преобразование сил.**

Для преобразования составляющих силы $\vec{F}$ запишем сначала формулы преобразования 4-силы. С помощью формул (3.3) и (3.4) имеем:

$$f_0' = \frac{f_0 - i\frac{V}{c}f_1}{\sqrt{1-V^2/c^2}},\quad f_1' = \frac{i\frac{V}{c^2}f_0 + f_1}{\sqrt{1-V^2/c^2}},\quad f_2' = f_2,\ f_3' = f_3.$$

Подставим в это уравнение значение $f_\alpha$ в соответствии с (6.7):

$$\frac{\vec{F}'\vec{v}'}{\sqrt{1-v'^2/c^2}} = \frac{\vec{F}\vec{v} - VF_x}{\sqrt{1-V^2/c^2}\,\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

$$\frac{F_x'}{\sqrt{1-v'^2/c^2}} = \frac{F_x' - \frac{V}{c^2}\vec{F}\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}\,\sqrt{1-V^2/c^2}},$$

$$\frac{F'_y}{\sqrt{1-v'^2/c^2}} = \frac{F_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

$$\frac{F'_z}{\sqrt{1-v'^2/c^2}} = \frac{F_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Используя найденное ранее в примере (3.1) соотношение

$$\frac{1}{\sqrt{1-v'^2/c^2}} = \frac{1-\frac{Vv_x}{c^2}}{\sqrt{1-V^2/c^2}\,\sqrt{1-v^2/c^2}},$$ получаем для проекции силы

$$F_x' = \frac{F_x - \frac{V}{c^2}\vec{F}\vec{v}}{1-\frac{Vv_x}{c^2}}, \quad (1) \qquad F_y' = \frac{F_y\sqrt{1-V^2/c^2}}{1-\frac{Vv_x}{c^2}}, \quad (2)$$

$$F_z' = \frac{F_z\sqrt{1-V^2/c^2}}{1-\frac{Vv_x}{c^2}}, \quad (3) \qquad \vec{F}'\vec{v}' = \frac{\vec{F}\vec{v} - VF_x}{1-\frac{Vv_x}{c^2}}. \quad (4)$$

Из формул (1—4) видно, что сила существенно зависит от скорости $v$ движения точки в системе.

Пример 6.2. **Преобразование силы, действующей в некоторой системе на неподвижную точку.**

Пусть в нештрихованной системе материальная точка покоилась и на нее действовала сила $F_x = F$, $F_y = 0$, $F_z = 0$. В штрихованной системе $F'_x = F$, $F'_y = 0$, $F'_z = 0$, $\vec{F}'\vec{v}' = -VF$, т. е. сила в этой системе совершает работу $-VF$. Если все проекции силы в некоторой системе — нули, то силы нет и во всех остальных системах.

Пример 6.3. **Преобразование силы, поперечной движению.**

Пусть в нештрихованной системе на точку, движущуюся со скоростью $v_y = v$, $v_x = 0$, $v_z = 0$, действует сила $F'_y = F$, $F'_x = F'_z = 0$. В таком случае в штрихованной системе составляющие силы таковы:

$$F'_x = \frac{-V}{c^2}\vec{F}\,\vec{v},\ F'_y = F\sqrt{1 - V^2/c^2}\ ,\ F'_z = 0.$$

Кроме составляющей по оси $O'y'$, возникла перпендикулярная составляющая $F'_x$, не равная нулю. Такая составляющая, не имевшая место в нештрихованной системе, возникает при действии в этой системе сил, перпендикулярных $\vec{V}$, и при скорости точки, также перпендикулярной $\vec{V}$.

Пример 6.4. **Сравнение направлений ускорения и силы в релятивистском случае.**

Выполним указанное в уравнении (6.1) дифференцирование, предварительно деля обе части его на $m$:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\ \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{mc^2}\ \frac{d}{dt}\ \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\vec{F}}{m},$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\ \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{mc^2}(\vec{F}\,\vec{v}) = \frac{\vec{F}}{m},$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{m}\left(\vec{F} - \frac{\vec{v}}{c^2}(\vec{F}\,\vec{v})\right). \qquad (1)$$

Ускорение $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ не совпадает с направлением силы в общем случае.

Пусть в начальный момент времени $\vec{v} = 0$, или $\vec{F} \parallel \vec{v}$. Тогда для постоянной по направлению силы $\vec{a} \parallel \vec{F}$ и $\vec{v} \parallel \vec{F}$ в течение всего времени движения, а движение прямолинейное. В этом случае вместо векторного можно записать скалярное уравнение

$$\frac{d}{dt}\ \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = F,$$

откуда после выполнения дифференцирования получается:

$$\frac{m}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}\,a = F. \qquad (2)$$

Если сопоставить формулу (2) с обычным ньютоновым уравнением $m\vec{a} = \vec{F}$, то можно видеть, что роль массы в этом движении играет величина

$$m_{\text{пр}} = \frac{m}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}.$$

Эту массу называли ранее продольной.

Пусть сила в течение всего времени движения перпендикулярна скорости. В таком

случае ускорение сонаправлено с вектором силы, а скорость постоянна по модулю. Вместо (6.1) имеем:

$$\frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\vec{a}=\vec{F}.$$

Роль классической массы играет величина

$$m_{\text{поп}}=\frac{m}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}.$$

Она именовалась ранее в ходе развития СТО поперечной массой.

Заметим еще, что в системе отсчета, где материальная точка покоится в данный момент времени, как уравнение (6.1), так и равенство (1) рассматриваемого примера переходят в обычное ньютоново уравнение.

Пример 6.5. **Прямолинейное движение под действием постоянной силы.**

Пусть $F_x=F,\quad F_y=F_z=0$, где $F=\text{const}$, а в начальный момент времени материальная точка покоится в начале координат. Уравнения (6,1) и (6.5) при этих условиях имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=F,\quad (1)\qquad \frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=F\frac{dx}{dt}. \qquad (2)$$

Из уравнения (2) получаем интеграл энергии

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-mc^2=Fx,$$

откуда находим скорость движения точки. Но предварительно удобно ввести обозначения для постоянного отношения силы к массе, т. е.

$$\frac{F}{m}=w.$$

Теперь скорость выражается формулой

$$v=c\sqrt{1-\frac{1}{\left(1+\frac{wx}{c^2}\right)^2}}. \qquad (3)$$

Для нахождения кинематического уравнения движения $x=x(t)$ можно использовать формулу (3) или непосредственно (1):

$$d\frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=wdt,$$

откуда

$$v=\frac{wt}{\sqrt{1+\left(\frac{wt}{c}\right)^2}}. \qquad (4)$$

Далее,

$$\frac{dx}{dt}=\frac{wt}{\sqrt{1+\left(\frac{wt}{c}\right)^2}},\quad x=\int\frac{wtdt}{\sqrt{1+\left(\frac{wt}{c}\right)^2}}+x_0,$$

$$x=\frac{c^2}{w}\left(\sqrt{1+\left(\frac{wt}{c}\right)^2}-1\right). \qquad (5)$$

Из формул (3) и (4) видно, что пределом $v$ является $c$, т. е. $v < c$, как долго бы ни продолжался разгон тела. Формула (4) переходит в классическую при малых $t$:

$$v = wt.$$

То же относится и к (5), если разложить корень выражения по биномиальной формуле, то

$$x = \frac{wt^2}{2}.$$

**6.2. Движение заряженной материальной точки в электромагнитном поле.** Выше говорилось, что этот случай типичен для квазирелятивистских движений. Сила Лоренца, действующая на точечный заряд в электромагнитном поле, принадлежит к обобщенно-потенциальным силам, а функция Лагранжа, соответствующая ей и инвариантная по отношению к преобразованиям Галилея, написана ранее в виде

$$L = \frac{mv^2}{2} - q\varphi + q\vec{A}\vec{v}.$$

Потребуем, чтобы она была лоренц-инвариантна. С учетом формул (4.2) и (4.3) имеем:

$$L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} - q\varphi + q\vec{A}\,\vec{v}, \tag{6.9}$$

где выражение $\dfrac{-q\varphi + q\vec{A}\,\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

должно быть скаляром преобразований Лоренца.

Уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$$

для данного случая нетрудно записать, если опираться на вычисления, проделанные ранее в § 4 и в примере I, 21.5. После вычислений получим:

$$\frac{d}{dt}\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = q\vec{E} + q[\vec{v}\,\vec{B}], \tag{6.10}$$

где $\vec{E}$ — напряженность электрического поля, $\vec{B}$ — индукция магнитного поля.

Нетрудно вычислить и функцию Гамильтона, играющую роль полной энергии заряженной точки в поле:

$$\vec{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + q\varphi. \tag{6.11}$$

Она сохраняется в стационарном поле.

Временно́е уравнение для данного случая будет иметь вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = q\vec{E}\vec{v}. \tag{6.12}$$

Подчеркнем важную особенность силы Лоренца: она получена как ковариантное выражение для всех ИСО. Поэтому при переходе от одной ИСО к другой изменяются векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ электромагнитного поля, но форма силы Лоренца сохраняется во всех ИСО:

$$\vec{F}_{л} = q\vec{E} + q[v\vec{B}]. \qquad (6.13)$$

Получим также обобщенный импульс заряженной точки в электромагнитном поле. По формуле (I, 22.7) находим, что

$$\vec{p}_{об} = \frac{m\vec{v}^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + q\vec{A}; \qquad (6.14)$$

обобщенный импульс не совпадает с релятивистским импульсом свободной точки.

Осталось заметить, что рассмотренный случай реализуется, как правило, для ионов и элементарных частиц, разгоняемых в ускорителях; для электронов в некоторых вакуумных электронных приборах и установках; для частиц в космических электромагнитных полях. Но при ускоренном движении зарядов имеет место излучение, а следовательно, и действие на частицу, кроме силы Лоренца, диссипативной силы. Последней мы пренебрегли, ограничиваясь случаями, когда излучение мало.

Пример 6.6. **Движение частицы в постоянном электрическом поле.**

Опираясь на пример 6.5, получаем все выводы об уравнении движения и скорости заряженной точки в постоянном поле, где $\vec{F} = q\vec{E}$. Скорость движения можно получить из интеграла энергии:

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + q\varphi = mc^2 + q\varphi_0 .$$

Вводя разность потенциалов $U = \varphi_0 - \varphi$, после простых выкладок имеем:

$$v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}\sqrt{\frac{1 + \frac{qU}{2mc^2}}{1 + \frac{qU}{mc^2}}},$$

причем первый сомножитель совпадает с соответствующим классическим выражением, а второй дает релятивистскую поправку. Если выполняется неравенство $\frac{qU}{mc^2} \ll 1$, то применима классическая механика. Для электронов, например, получаем нерелятивистское движение при условии $U < 6 \cdot 10^5$ В. Это дает представление о релятивистской области разности потенциалов для этих частиц.

Пример 6.7. **Движение частицы в постоянном магнитном поле.**

Оно описывается уравнениями

$$\frac{d}{dt}\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = q[\vec{v}\,\vec{B}], \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 0. \qquad (2)$$

Из (2) следует, что $v = \mathrm{const}$, $\vec{v} = v\vec{\tau}$, где $\vec{\tau}$ — единичный вектор касательной к траектории. Подставляя это выражение для скорости в (1), имеем:

$$\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d\vec{\tau}}{dt} = qv[\vec{\tau}\vec{B}]. \qquad (3)$$

Далее,

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{d\vec{\tau}}{ds}.$$

Из геометрии известно, что

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{R}\vec{n},$$

где $R$ — радиус кривизны траектории, а $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к ней. Поэтому вместо (3) получаем:

$$\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{v}{R}\vec{n} = qvB \sin(\vec{\tau}\widehat{\ }\vec{B})\,\vec{n},$$

или окончательную формулу:

$$\frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{v}{R} = qB \sin(\vec{\tau}\widehat{\ }\vec{B}). \qquad (4)$$

Для того чтобы равенство (4) выполнялось, необходимо сохранение величины угла между вектором $\vec{B}$ и касательной к траектории и постоянство кривизны траектории. Таким образом, траекторией будет винтовая линия, ось которой совпадает с направлением магнитного поля.

Важен случай, при котором частица начинает движение перпендикулярно полю. Тогда траекторией служит окружность с радиусом

$$R = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{v}{qB}. \qquad (5)$$

Релятивистские эффекты описаны в формуле (5) корнем в знаменателе.

На практике широко применяются «скрещенные» электрические и магнитные поля: в них электрическое поле ускоряет частицы; а магнитное — направляет их (ускорители элементарных частиц).

## § 7. Неинерциальные системы и гравитационное поле в теории относительности

**7.1. Гравитационное поле в классической механике.** Фундаментальное макроскопическое поле природы (гравитационное) в классической механике описывается законом всемирного тяготения

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^3}\vec{r}, \qquad (7.1)$$

где гравитационная постоянная $g = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²·кг⁻². Такая сила действует на материальную точку массой $m$ в поле, созданном другой точкой с массой $M$, помещенной в начале координат. Поле стационарное центрально-симметричное и потенциальное. В примере (I, 11.3) было показано, что потенциальная энергия частицы в поле в этом случае определяется формулой

$$U = -G\frac{mM}{r} = -\gamma\frac{m}{r}, \qquad (7.2)$$

где $\gamma = GM$.

Необходимо помнить, что в приведенных формулах $m$ и $M$ — гравитационные массы, или гравитационные заряды тел, характеризующие не инерциальные свойства этих тел, а способность создавать гравитационное поле и испытывать действие силы в нем.

Потенциал точки поля определяется формулой

$$\varphi = \frac{U}{m}. \qquad (7.3)$$

Для рассмотренного поля точечной гравитационной массы потенциал легко вычислить с помощью (7.2):

$$\varphi = -G\frac{M}{r} = -\frac{\gamma}{r}. \qquad (7.4)$$

Так как в классической механике справедлив принцип суперпозиции сил (I, § 5.3), то он имеет место и для потенциала гравитационного поля. Если поле создано системой материальных точек с массами $m_i$, то потенциал его находится по формуле

$$\varphi = -G\sum_i \frac{m_i}{r_i'}, \qquad (7.5)$$

где $\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{r}_{0i}$ — расстояния от гравитирующих масс до точки наблюдения.

Нетрудно записать формулу потенциала и для случая непрерывного распределения гравитационной массы по пространству.

Пусть известна плотность ее $\rho = \dfrac{dm}{dV}$, в таком случае

$$\varphi = -G\int_V \rho\frac{dV}{r'}. \qquad (7.6)$$

Зная потенциалы точки поля, можно не только определить потенциальную энергию тела по формуле (7.3), помещенного в поле, но и найти силу, действующую на тело. Учитывая формулу (I, 11.4), имеем:

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} U = -m \operatorname{grad} \varphi. \qquad (7.7)$$

Из этой формулы видна целесообразность введения нового понятия — напряженности гравитационного поля:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}. \qquad (7.8)$$

Как видно, это есть отношение силы, действующей в поле на точечную массу, к величине массы. Сравнивая (7.7) и (7.8), получаем: $\vec{g} = -\operatorname{grad} \varphi$.

Теперь можно понять, в чем заключается общий подход к описанию поля: с помощью (7.5) или (7.6), а также дифференциального уравнения для потенциала, эквивалентного (7.6)

$$\Delta \varphi = 4\pi G\rho, \qquad (7.9)$$

находят потенциалы поля как функцию координат точки пространства, а по нему — напряженность поля и силу, действующую на тело, находящееся в поле.

Важнейшей особенностью гравитационного поля является то, что создающая его гравитационная масса пропорциональна, а при выборе единиц в системе СИ равна инертной массе (см. § 8.3). По этой причине все тела в некоторой точке поля движутся с одним и тем же ускорением:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \vec{g}. \qquad (7.10)$$

Ускорение тела не зависит от массы тела, а определяется только напряженностью поля в данной точке пространства.

Данная закономерность для гравитационного поля позволяет установить аналогию между движением тел в поле и движением тел в отсутствие сил, но в неинерциальной системе отсчета.

Вернемся к первой части книги, к § 8.1. Силы инерции, определяемые формулами (8.4) и (8.5) (переносная и кориолисова), так же как и гравитационные, пропорциональны массе тела. Поэтому ускорение тела в неинерциальной системе не зависит от его массы, а определяется характером движения системы, положением и скоростью тела в ней.

В этой связи говорят об *эквивалентности неинерциальной системы некоторому гравитационному полю*. Например, рассмотрим систему $K'$, поступательно движущуюся в системе $K$ с постоянным ускорением $\vec{a}_n$. Согласно (I, 8.4) на тело в системе $K'$ действует сила инерции $\vec{I}_n = -m\vec{a}_n$, эквивалентная гравитационной силе в поле с напряженностью

$$\vec{g} = -\vec{a}_n. \tag{7.11}$$

С точки зрения вращающейся с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$ системы $K'$, где на тело согласно (I, 8.11) действуют силы инерции $\vec{I}_n + \vec{I}_k = -m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\,\vec{r}']] - 2m[\vec{\omega}\,\vec{v}']$, эти силы можно заменить гравитационным полем с напряженностью

$$\vec{g} = -[\vec{\omega}[\vec{\omega}\,\vec{r}']] - 2[\vec{\omega}\,\vec{v}']. \tag{7.12}$$

Однако эквивалентность неинерциальной системы и гравитационного поля неполная. Только в небольшой области пространства, где поле можно считать однородным, можно ввести неинерциальную систему, исключающую поле. Для этого достаточно взять систему с $\vec{a}_n = -\vec{g}$. Во всем пространстве такая замена невозможна. Например, во вращающейся системе в соответствии с (7.12) силы инерции неограниченно растут с ростом $r'$. Но такое поле не существует при любом распределении создающих его масс.

**7.2. Подход к гравитационному полю в теории относительности.** В СТО, как это описано в § 1, действует принцип относительности, устанавливающий полное физическое равноправие инерциальных систем отсчета и ковариантность уравнений, выражающих основные законы природы по отношению к преобразованиям Лоренца — переходу от одной ИСО к другой. Но гравитационному полю эквивалентна неинерциальная система отсчета. Поэтому включение в теорию относительности гравитационных полей требует расширения круга применяемых систем, включения в рассмотрение неинерциальных систем отсчета. Это и сделано в общей теории относительности (ОТО). Окончательную формулировку ее А. Эйнштейн выполнил к 1916 году. *Общая теория относительности есть теория пространства, времени и тяготения.*

Физическим основанием для построения ОТО послужил одинаковый характер проявления сил инерции, обусловленных неинерциальным движением системы координат и сил тяготения. Поэтому ОТО оперирует с произвольно движущимися системами отсчета. Но в таком случае преобразования координат при переходе от одной системы к другой оказываются более сложными, нежели изученные нами ранее преобразования Лоренца. В общем случае переход от системы $K$ к системе $K'$ выражается формулами

$$x'_\alpha = f_\alpha(x_0, x_1, x_2, x_3), \tag{7.13}$$

где $f_\alpha$ — некоторые однозначные непрерывные функции, $x_0$ — временная, а $x_1, x_2, x_3$ — три пространственные координаты точки, криволинейные.

В инерциальных системах любой закон природы выражается уравнениями одной и той же формы, т. е. уравнения лоренц-ковариантны. Идея ковариантности уравнений движения тела в гравитационном поле и уравнений самого поля при общих преобразованиях (7.13) в ОТО также является ведущей.

Геометрические свойства пространства-времени в инерциальных системах отсчета, так называемая *метрика* пространства, с большой полнотой отражены в форме пространственно-временного интервала (2.5): $ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$. В случае неинерциальных систем отсчета метрика пространства-времени изменяется, т. е. интервал не сводится к (7.13), а выражается более общей формулой:

$$ds^2 = \sum_{\alpha,\ \beta} g_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta. \tag{7.14}$$

Здесь $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x_0, x_1, x_2, x_3)$ — некоторые функции координат точки пространства и момента времени.

Придавая индексам $\alpha$, $\beta$ значения 0, 1, 2, 3, получим матрицу величин

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \qquad (7.15)$$

Совокупность данных шестнадцати величин $g_{\alpha\beta}$ в математике называется метрическим тензором. Этот тензор симметричен, т. е. $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$, следовательно, в общем случае различны четыре элемента на главной диагонали в матрице (7.15), а остальные двенадцать попарно равны. Всего различных элементов десять.

С помощью (7.14) можно выразить интервал и в инерциальных системах, если взять метрический тензор:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (7.16)$$

Такой его вид соответствует декартовой прямоугольной системе координат. (Заметим, что теперь необходимость в использовании мнимой единицы у временной координаты отпадает, так как минус в интервал вносится элементом $g_{00}$.)

Для понимания подхода к гравитационному полю в ОТО очень важно учесть, что в неинерциальных системах отсчета никаким преобразованием координат (7.13) метрический тензор (7.15) свести к виду (7.16) невозможно. Неинерциальный характер системы выражается в том, что в матрице есть элементы $g_{\alpha\beta}$, отличные от нуля и единицы и являющиеся функциями координат и времени.

Опираясь далее на принцип эквивалентности, заключаем, что при наличии гравитационного поля метрический тензор также не сводим к виду (7.16), а гравитационное поле учтено в нем зависимостью

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x_0, x_1, x_2, x_3). \qquad (7.17)$$

Итак, гравитационное поле в ОТО сводится к метрике пространства-времени. Пространство-время при наличии поля не является «плоским», или галилеевым, с метрическим тензором (7.16), а оказывается «кривым», или римановым, с тензором (7.15).

Исходная аксиома ОТО состоит в следующем утверждении: *при наличии гравитационного поля метрика пространства задается формулой* (7.14), *а поле характеризуется элементами тензора* (7.15).

Знание функций (7.17) позволяет определить все параметры поля, решить все задачи о движении тел в поле; поэтому основными в теории являются уравнения для нахождения $g_{\alpha\beta}$. Они связывают величины $g_{\alpha\beta}$ с распределением и движением материи в пространстве. Таким образом, с одной стороны, гравитация сводится к геометрическим свойствам пространства, а с другой — геометрические свойства пространства определяются физическими явлениями и материальными объектами.

При первоначальном знакомстве с ОТО мы вынуждены ограничиться разъяснением на простых примерах того, как поле задается через метрический тензор. Перед вопросом об уравнениях поля придется остановиться. (Об уравнениях поля см.: Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля.— М., 1948.— Гл. XI.)

В качестве примера рассмотрим интервал с точки зрения двух систем: инерциальной $K'$ и вращающейся в ней неинерциальной $K$. В инерциальной системе $K'$ выберем цилиндрические координаты $x_1 = r'$, $x_2 = z'$, $x_0 = \varphi'$ и временную $x_0 = ct'$. В таком случае имеем:

$$ds^2 = -c^2dt'^2 + dr'^2 + r'^2d\varphi'^2 + dz'^2. \qquad (7.18)$$

Метрический тензор для (7.15) имеет вид:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (7.19)$$

Неинерциальная система $K$ вращается вокруг оси цилиндрической системы $K'$

с угловой скоростью ω. Сохраняя прежнюю временную координату, имеем формулы перехода:

$$ct' = ct,\ r' = r,\ \varphi' = \varphi + \omega t,\ z' = z. \qquad (7.20)$$

Теперь можно записать интервал (7.18) в этой системе:

$$ds^2 = -(c^2-\omega^2r^2)dt^2 + 2\omega r^2 dydt + dr^2+r^2d\varphi+dz^2. \qquad (7.21)$$

Развернем выражение (7.14):

$$ds^2 = g_{00}dx_0^2 + 2g_{02}dx_0dx_2 + g_{11}dx_1^2 + g_{22}dx_2^2 + g_{33}dx_3^2 + \dots$$

и сравним с (7.21). Отсюда и находятся элементы метрического тензора:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\left(1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}\right) & 0 & \frac{\omega r^2}{c} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\omega r^2}{c} & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (7.22)$$

Из примера видно, что значат в конкретном случае формулы (7.13), каково отличие метрического тензора для неинерциальных систем от инерциальных. Если (7.19) переходом к декартовой системе приведется к (7.16), то (7.22) никакими преобразованиями, сохраняющими указанное вращение $K$ в $K'$, к виду (7.16) не привести. Зависимость координат от времени при вращении системы непременно даст отличные от единиц множители при дифференциалах в интервале (7.21), а вместе с тем и новые элементы тензора.

**7.3. Собственное время и расстояния между точками.** Так как в ОТО в общем случае применяются криволинейные координаты и произвольные преобразования координат, то теоретически выбор координат очень широк. В качестве пространственных координат $x_1$, $x_2$, $x_3$ могут фигурировать различные величины, однозначно определяющие положение точки в системе отсчета. Что касается времени $t$, входящего во временную координату $x_0 = ct$, то благодаря возможности произвольного преобразования (7.13) время можно определить в каждой точке пространства по произвольно идущим часам. В такой общей постановке вопроса измерение пространственных координат и времен событий ограничено лишь требованием непрерывности четырехмерного континуума — множества точек ($x_0$, $x_1$, $x_2$, $x_3$).

Но такая свобода в использовании координат носит скорее математический, а не физический характер: в конкретных измерениях и расчетах использование одних координат может оказаться предпочтительнее либо из соображений простоты, либо потому, что они высвечивают физическое содержание результатов. Так, заключение о продолжительности процессов можно получить, если возможно введение *единого времени* в системе. В свою очередь отделить гравитационное поле от проявлений сил инерции, являющихся результатом выбора неинерциальной системы, можно, используя так называемые гармонические координаты.

При использовании любых систем отсчета необходимо определять промежутки истинного времени между двумя событиями в одной и той же точке пространства по произвольно идущим часам системы и расстояния между двумя точками (длины некоторых отрезков) по координатам их концов. Как и в СТО, в ОТО вводится понятие *собственного*, или *истинного*, времени в данной точке пространства. Для его измерения каждая точка снабжается физически эквивалентными часами. Время, измеренное по таким часам, и есть собственное время в данной точке. Обозначая бесконечно малый промежуток собственного времени через $d\tau$, имеем формулу, определяющую собственное время как инвариант преобразований координат, аналогичную (2.9): $c^2d\tau^2 = -ds^2$.

Далее, для установления связи собственного времени со временем системы $x_0$ следует выразить $ds^2$ по (7.14) с учетом того, что интервал берется между двумя событиями в одной и той же точке пространства.

Окончательно получаем:

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-g_{00}}\ dx_0. \qquad (7.23)$$

Для конечных промежутков времени $\tau = \frac{1}{c}\int\sqrt{-g_{00}}\,dx_0$.

Если $g_{00}$ зависит от координат $x_1$, $x_2$, $x_3$, то собственное время в разных точках пространства течет по-разному, если же $g_{00}$ зависит и от временной координаты $x_0$, то изменяется и темп собственного времени в данной точке пространства. Сравнить собственное время в разных точках системы можно при условии, если $x_0$ — единое время системы. (Оно называется также мировым.) Единое время можно установить в случае, если поле постоянно и в удаленных точках отсутствует: $x_0 = ct$, где $t$ определяется по часам удаленных точек. В такой системе временные отметки-сигналы можно послать в любую точку, так как расстояния в ней измеримы и неизменны.

Обратимся теперь к измерению расстояния между двумя точками. В СТО мы говорили об измерении длин неподвижных отрезков путем наложения на них жесткого масштаба (§ 2.1). Существует и другой метод измерения расстояний, также широко применяемый на практике. Это локационный метод, основанный на постоянстве скорости света или любой другой электромагнитной волны.

Пусть свет из точки $B(x_\alpha + dx_\alpha)$ направлен в точку $A(x_\alpha)$, а затем отражен в точку $B$, причем в точке $B$ прошло время $d\tau$. Тогда расстояние между точками $B$ и $A$ определяется соотношением

$$dl = c\frac{d\tau}{2}. \tag{7.24}$$

С помощью (7.24) можно установить формулу, выражающую расстояние через координаты точек, между которыми оно измерено, если метрика пространства задана. Сделаем это сначала для инерциальных систем с метрикой (7.16). Светоподобный интервал между событиями — отправка светового сигнала из точки $B$ и приход его в точку $A$ — равен нулю: $-dx_0^2+dx^2+dy^2+dz^2=0$. Отсюда $dx_0=\pm\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$.

Для определения времени $d\tau$, прошедшего в точке $B$ между отправкой и возвращением сигнала, запишем и сравним между собой временные координаты отправки и возвращения: отправка $x_0 - |dx_0|$, возвращение $x_0 + |dx_0|$, изменение $2|dx_0|$. Отсюда с учетом значения $g_{00} = -1$ формула (7.23) дает: $d\tau = \frac{2|dx_0|}{c} = \frac{2}{c}\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. Подставляя это значение собственного времени в формулу, определяющую расстояние между двумя точками, имеем:

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \tag{7.25}$$

— результат, очевидный с точки зрения евклидовой геометрии, действующей в трехмерном пространстве.

Повторим рассуждения для общего случая неинерциальной системы с гравитационным полем, метрика пространства в которой задана формулой (7.14). Запишем интервал:

$$g_{00}dx_0^2 + 2g_{i0}dx_0dx_i + g_{ik}dx_idx_k = 0. \tag{7.26}$$

Здесь и далее для упрощения записей знак суммы опускаем. Если сомножители имеют повторяющийся индекс, то по нему ведется суммирование. Напомним также, что греческий индекс принимает четыре значения: 0, 1, 2, 3, а латинский — три: 1, 2, 3.

Из (7.26) следует:

$$dx_0 = \frac{1}{g_{00}}\left[g_{0i}dx_i \pm \sqrt{(g_{0i}g_{0k} - g_{ik}g_{00})\,dx_idx_k}\,\right]. \tag{7.27}$$

Переходя к собственному времени с помощью (7.23), получаем:

$$d\tau = \frac{2}{c\sqrt{-g_{00}}}\sqrt{(g_{0i}g_{0k} - g_{ik}g_{00})\,dx_idx_k}\,. \tag{7.28}$$

Осталось подставить (7.28) в (7.24), и искомая формула выведена:

$$dl = \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}\sqrt{(g_{0i}g_{0k} - g_{ik}g_{00})\,dx_idx_k}\,. \tag{7.29}$$

Целесообразно с помощью (7.29) ввести метрический тензор для трехмерной пространственной части четырехмерного пространства. Возводя (7.29) почленно в квадрат, имеем:

$$dl^2 = \left(g_{ik} - \frac{g_{i0}g_{k0}}{g_{00}}\right) dx_i dx_k. \tag{7.30}$$

Известно, что (7.30) выражает пространственный интервал — расстояние в соответствии с общей формулой римановой геометрии (7.14). Роль метрического тензора, который можно назвать пространственным, в ней играет величина

$$\gamma_{ik} = g_{ik} - \frac{g_{i0}g_{k0}}{g_{00}}. \tag{7.31}$$

Итак, расстояние между двумя точками по их координатам и метрическому тензору определено:

$$dl = \sqrt{\gamma_{ik} dx_i dx_k}\ . \tag{7.32}$$

Практическое значение формула (7.32) приобретает при условии, если в системе отсчета можно ввести единое время $x_0$. В таком случае $\gamma_{ik}$ от времени не зависит и расстояния между телами постоянны.

**7.4. Слабое стационарное гравитационное поле.** Новый подход к гравитационному полю в ОТО должен в предельном случае слабых стационарных полей давать известные из ньютоновой теории результаты. В методическом отношении полезно описать известное поле средствами ОТО; это позволит проиллюстрировать часть введенных выше понятий на доступном примере.

Итак, рассматривается поле с ньютоновым потенциалом $\varphi$. Выберем систему координат. В слабых полях отклонение метрики трехмерного пространства $(x, y, z)$ от евклидовой незначительно. Поэтому целесообразен выбор декартовых прямоугольных координат: $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$. В качестве временной координаты выберем $x_0 = ct$, где $t$ — синхронизированное время инерциальной системы отсчета, т. е. время, устанавливаемое по часам тех точек системы, где $\varphi = 0$ (например, достаточно удаленных от гравитирующих масс). Это время будет одним и тем же: будет течь одинаково во всех точках системы. Практически в рассматриваемом случае временные отметки можно послать из точки, где расположены часы, в любую его точку с помощью световых сигналов.

Найдем метрический тензор четырехмерного пространства рассматриваемой системы отсчета со слабым полем. Для этого запишем интегралы, выражающие *действие* материальной точки в поле с потенциалом $\varphi$ в классической и релятивистской форме. С помощью формул (I, 24.1), (I, 21.1), а также (7.3) имеем классическое выражение

$$S_{кл} = \int \left(- mc^2 + \frac{mv^2}{2} - m\varphi\right) dt, \tag{7.33}$$

где к потенциальной энергии добавлена энергия покоя частицы $mc^2$.

Для получения релятивистского выражения используем формулу (4.3) и придадим ей инвариантное значение: $S_{рел} = -\int mcds$.

Однако придется учесть одно дополнительное обстоятельство. Для реальных движений интервалы мнимы (см. § 2.3), поэтому здесь $ds$ — мнимая величина и мнимо действие $S_{рел}$. Так как мы будем приравнивать $S_{рел}$ и $S_{кл}$, а действие можно определить с точностью до постоянных множителей, запишем вместо (7.34) вещественную величину

$$S_{рел} = - mc\int ids. \tag{7.34}$$

Преобразуем (7.33) с учетом равенства $\vec{v}dt = d\vec{r}$:

$$S_{кл} = - mc \int cdt - \frac{1}{2}\frac{\vec{v}d\vec{r}}{c} + \frac{1}{c}\varphi dt. \tag{7.35}$$

Приравнивая (7.34) и (7.35), имеем:

$$ids = cdt - \frac{1}{2}\frac{\vec{v}d\vec{r}}{c} + \frac{1}{c}\varphi dt. \tag{7.36}$$

Далее следует воспользоваться (7.14): $ds^2 = g_{00}dx_0^2 + 2g_{0i}dx_0dx_i + g_{ik}dx_idx_k$ и сравнить $ds^2$ с квадратом (7.36), где члены с $\frac{v^2}{c^2}$ отброшены:

$$ds^2 = -(c^2 + 2\varphi)\,dt^2 + d\vec{r}^2. \tag{7.37}$$

В результате сравнения получаем:

$$g_{00} = -\left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right), \tag{7.38}$$

а остальные элементы тензора — нули и единицы.

Итак, искомый метрический тензор с приближенным значением элементов найден:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.39}$$

Характерно, что гравитационное поле учтено элементом тензора, в данном случае только $g_{00}$. Но и этого достаточно, чтобы четырехмерное пространство стало неевклидовым. Искривлением трехмерного пространства $(x, y, z)$ мы пренебрегли, однако незначительные отклонения его от евклидового имеются, что можно понять, если вспомнить об отброшенных членах в (7.37).

Обратимся теперь к ходу собственного времени в рассматриваемом стационарном поле. Согласно (7.23) имеем: $d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{1 + \frac{2\varphi}{c^2}}\,dx_0$ или с учетом выбора $x_0$:

$$d\tau = \sqrt{1 + \frac{2\varphi}{c^2}}\,dt. \tag{7.40}$$

Таким образом, собственное время в разных точках пространства течет по-разному. Необходимо еще учесть сделанный ранее выбор $x_0$ и $t$ — времени в точках $\varphi = 0$ за пределами поля. Учитывая, что в гравитационном поле $\varphi < 0$, находим, что собственное время течет медленнее в точках с меньшим потенциалом (модуль его больше). Замедление времени в гравитационном поле обнаружено экспериментально: это смещение спектральных линий в солнечном спектре в сторону низких частот относительно тех же линий, полученных в земных условиях, где модуль потенциала поля меньше.

В заключение проиллюстрируем примером отклонение геометрии пространства в неинерциальных системах от евклидовой. Метрический тензор для вращающейся системы (7.22) позволяет записать формулу (7.30) для элемента длины:

$$dl^2 = dr^2 + dz^2 + \frac{r^2 d\varphi^2}{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}. \tag{7.41}$$

Неевклидовость пространства видна хотя бы из того, что длина окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной оси вращения, не равна $2\pi r$. В самом деле,

$$\int \frac{r\,d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}} = \frac{2\pi r}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}} > 2\pi r.$$

**7.5. Движение материальной точки в слабом поле.** Получим уравнение движения точки в поле, используя принцип экстремального действия (I, 24.2) и вытекающие из него уравнения Лагранжа (I, 24.4). Действие для частицы в поле задается формулой (7.34): $S = -\int_a^b imc\,ds.$

Минимум действия на действительной траектории, требуемый принципом, означает движение по линии с кратчайшей длиной между начальной и конечной точками, т. е. по геодезической линии в кривом пространстве. К чему это приводит, посмотрим на примере слабого постоянного поля (7.37), для которого

$$S = -\int_a^b mc\sqrt{-g_{00}dx_0^2 - \vec{r}^2}\ . \tag{7.42}$$

Для получения функции Лагранжа нужно придать действию обычный вид, т.е. выделить время, в данном случае единое $dt = \dfrac{dx_0}{c}$:

$$S = -\int_a^b mc^2\sqrt{-g_{00} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2}\ dt,$$

откуда

$$L = -mc^2\sqrt{-g_{00} - \frac{u^2}{c^2}}. \tag{7.43}$$

Теперь можно писать уравнение Лагранжа $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \vec{u}} = \dfrac{\partial L}{\partial \vec{r}}$ для данного случая:

$$\frac{d}{dt}\frac{\dfrac{\vec{u}}{c^2}}{\sqrt{-g_{00} - \dfrac{u^2}{c^2}}} = \frac{\operatorname{grad} g_{00}}{2\sqrt{-g_{00} - \dfrac{u^2}{c^2}}}. \tag{7.44}$$

Надо перейти к собственному времени от единого. С помощью (7.23) имеем: $dt = \dfrac{d\tau}{\sqrt{-g_{00}}}$, а также $\vec{u} = \dfrac{d\vec{r}\cdot\sqrt{-g_{00}}}{d\tau} = \vec{v}\sqrt{-g_{00}}$.

Поэтому (7.44) при переходе к собственному времени дает уравнение

$$\frac{1}{c^2}\frac{d}{d\tau}\frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{-\operatorname{grad} g_{00}}{2g_{00}\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}. \tag{7.45}$$

Осталось использовать значение $g_{00}$, даваемое (7.38):

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{-\operatorname{grad}\varphi}{\left(1 + \dfrac{2\varphi}{c^2}\right)\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}.$$

Чтобы сравнить полученное уравнение движения с классическим, удобно ввести массу точки:

$$\frac{d}{d\tau}\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{-\operatorname{grad}\varphi}{1 + \dfrac{2\varphi}{c^2}}\ \frac{m}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}. \tag{7.46}$$

Как видим, в расчет принимается релятнвистская масса как для инертных, так и для гравитацнонных свойств. Поправка вносится в выражение силы н за счет потеицнала $\left(\text{зиамеиатель} \quad 1+\frac{2\varphi}{c^2}\right)$.

Выражение для энергнн получаем по формуле (I, 22.2):

$$E=\frac{mc^2\sqrt{1+2\frac{\varphi}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{7.47}$$

Выражеиие (7.47) может быть разложено для $v \ll c$ н $\varphi \ll c$ в ряд и дать приблнжениое значеиие энергнн:

$$E=mc^2+\frac{mv^2}{2}+m\,\varphi. \tag{7.48}$$

На этом зиакомство с исходиыми положениями ОТО мы заканчиваем. Интересующимся можно порекомендовать книги Л. Д. Ландау, Е. М. Лнфшица и В. Ф. Фока (Ф о к В. А. Теория простраиства, времени и тяготення.— М., 1961) до настоящего времени с непревзойденным по ясиости изложением этой нитересиейшей физической теории. Новый взгляд на релятивистскую теорию гравитации содержится в кииге А. А. Логунова «Лекцни по теорнн относительиостн и гравитацни».— М.: Наука, 1987.

## Упражнения к главе II

1. Обосновать противоречнвость классннческого выраження второго закона Ньютона основам СТО.

2. Установить связь класснческого выражения кннетической энергин с релятивистскнм.

3. Получить уравиенне движення и законы сохранения эиергни для релятнвнстской частнцы в потенциальиом поле с лагранжиаиом

$$L=-mc^2\sqrt{1-v^2/c^2}+U(\vec{r}).$$

4. Две частнцы взанмодействуют, находясь на значнтельном расстоянни друг от друга. Справедлив ли для нх взаимодействия третнй закон Ньютона в рамках представлений СТО?

5. Являются лн релятнвнстскнмн выраження закона Кулона, всемнрного тяготения?

6. Прн какой скоростн движення кинетическая энергня частицы равна эиергии покоя?

7. Выразить кннетнческую энергию частицы через ее импульс.

8. Снла $\vec{F}$ во время двнжения остается перпендикулярной скоростн частицы н постояина по модулю. Определить характер двнжеиия.

*Ответ.* Движеине совпадает с классическим движеиием точкн с массой $m_{\text{поп}}=$ $=\frac{m}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}$ под действнем постояиной снлы, т. е., например, двнжеиием по окружиостн радиусом

$$r=\frac{v^2}{a}=\frac{v^2m}{F\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

9. Сила $\vec{F}$ параллельна скорости и постояина по модулю. Определить характер движеиия.

*Ответ.* Искомое движеине совпадает с класснческим для точки массой $m_{\text{пр}}=\frac{m}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}$ н ускореиием $a=\frac{F(1-v^2/c^2)^{3/2}}{m}$.

# Приложение I

Некоторые формулы и выкладки векторного анализа

1. $\operatorname{grad} \varphi(x, y, z) = \nabla \varphi(x, y, z) = \frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial\vec{r}} = \vec{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + k\frac{\partial\varphi}{\partial z}$

— формула градиента в декартовых координатах.

2. $\operatorname{grad}(\varphi + \psi) = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{grad}\psi$ — градиент суммы,
$\operatorname{grad}(C\varphi) = C\operatorname{grad}\varphi$ — $C$ — константа,
$\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi\operatorname{grad}\psi + \psi\operatorname{grad}\varphi$ — градиент произведения,
$\operatorname{grad} U(\varphi(x, y, z)) = \frac{\partial U}{\partial\varphi}\operatorname{grad}\varphi$ — градиент сложной функции.

3. $d\varphi(x, y, z) = \operatorname{grad}\varphi d\vec{r} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz$ — полный дифференциал функции.

4. $\operatorname{rot}\vec{a}(x, y, z) = \vec{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)$

— формула ротора в декартовых координатах.

5. $(\vec{a}\ \nabla\ \vec{b}) = a_x\frac{\partial\vec{b}}{\partial x} + a_y\frac{\partial\vec{b}}{\partial y} + a_z\frac{\partial\vec{b}}{\partial z}$ — определение оператора $(\vec{a}\ \nabla)$.

6. $\operatorname{grad}(\vec{a}\vec{b}) = (\vec{b}\ \nabla)\vec{a} + (\vec{a}\ \nabla)\vec{b} + [\vec{b}\operatorname{rot}\vec{a}] + [\vec{a}\operatorname{rot}\vec{b}]$ — дифференциальное тождество, или формула градиента скалярного произведения векторов.

7. Расчет силы Лоренца: $\vec{Q} = -q\frac{d}{dt}\vec{A} - q\operatorname{grad}\varphi + q\operatorname{grad}(\vec{A}\vec{v})$. Так как $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z, t)$, то на основе формулы (5) имеем:

$$\frac{d}{dt}\vec{A} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + (\vec{v}\ \nabla)\vec{A}.$$

Последнее слагаемое находим с помощью формулы (6), учитывая, что $\operatorname{rot}\vec{v} = 0$, так как $v$ от координат явно не зависит, и $(\vec{A}\ \nabla)\vec{v} = 0$ по той же причине: $\operatorname{grad}(\vec{A}\ \vec{v}) = (\vec{v}\ \nabla)\vec{A} + [\vec{v}\operatorname{rot}\vec{A}]$. Окончательно $\vec{Q} = -q\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - q\operatorname{grad}\varphi + q[\vec{v}\operatorname{rot}\vec{A}]$.

## Оглавление



### Часть I. Классическая механика

**Часть II. Основы специальной теории относительности. Релятивистская механика**

**Учебное издание**

**Мултановский Вячеслав Всеволодович**

**КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

Зав. редакцией *И. А. Иванов*
Редактор *О. В. Серышева*
Младший редактор *О. В. Агапова*
Художник *В. С. Давыдов*
Художественный редактор *В. М. Прокофьев*
Технический редактор *Г. В. Субочева*
Корректоры *Н. В. Бурдина, Л. С. Вайтман*

ИБ № 10582

Сдано в набор 04.05.87. Подписано к печати 21.02.88. Формат 60×90 1/16. Бум. офсетная № 2. Гарнит. литературная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 19,0 + форз. 0,25. Усл. кр.-отт. 19,5. Уч.-изд. л. 20,98 + форз. 0,36. Тираж 39 000 экз. Заказ № 348. Цена 1 руб.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано с диапозитивов ордена Трудового Красного Знамени ПО «Детская книга» Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 127018, Москва, Сущевский вал, 49, на Саратовском ордена Трудового Красного Знамени полиграфическом комбинате Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 410004, Саратов, ул. Чернышевского, 59.

| Величина | | | Единица |
|---|---|---|---|
| Наименование | Обозначение | Определяющая формула | Обозначени |
| Длина | $l;(s)$ | | м |
| Радиус-вектор | $\vec{r}$ | | м |
| Площадь | $S;(\sigma)$ | $S=l^2$ | $м^2$ |
| Объем | $V$ | $V=l^3$ | $м^3$ |
| Угол плоский | $\varphi,\alpha,\beta,\gamma$ | | рад |
| Угол телесный | $\omega,\Omega$ | | ср |
| Время | $t;(T,\tau)$ | | с |
| Частота | $\nu;(\omega)$ | $\nu=\frac{1}{T}$ | Гц, $с^{-1}$ |
| Скорость | $v;(u)$ | $v=\frac{ds}{dt}$ | м/с |
| Угловая скорость | $\omega$ | $\omega=\frac{d\varphi}{dt}$ | рад/с |
| Ускорение | $a$ | $a=\frac{d\vec{v}}{dt}$ | $м/с^2$ |
| Угловое ускорение | $\varepsilon;(\alpha)$ | $\vec{\varepsilon}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ | $рад/с^2$ |
| Масса | $m$ | | кг |
| Плотность | $\rho$ | $\rho=\frac{dm}{dV}$ | $кг/м^3$ |

| Величина | | | Единица |
|---|---|---|---|
| Наименование | Обозначение | Определяющая формула | Обозначение |
| Сила | $F$ | $\vec{F}=m\vec{a}$ | Н |
| Импульс тела | $p$ | $\vec{p}=m\vec{v}$ | кг·м/с |
| Момент импульса (угловой момент) | $L$ | $L=[r,p]$ | $кг \cdot м^2/с$ |
| Момент силы | $\underset{\sim}{M}$ | $M=[\vec{r},\vec{F}]$ | Н·м |
| Момент инерции | $I$ | $I=r^2 m$ | $кг \cdot м^2$ |
| Вес тела | $P;(G)$ | | Н |
| Гравитационная постоянная | $G$ | | $Н \cdot м^2/кг^2$ |
| Энергия | $E;(U,T,W)$ | | Дж |
| Работа | $A$ | | Дж |
| Мощность | $P;(N)$ | | Вт |
| Функция Лагранжа | $L$ | | Дж |
| Обобщенная координата | $q$ | | |
| Обобщенная сила | $Q$ | | |
| Обобщенный импульс | $p_k$ | $p_k=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ | |